ФИО ученика____
ФИО учителя____
Город/район____
Школа____

Таблица полученных ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

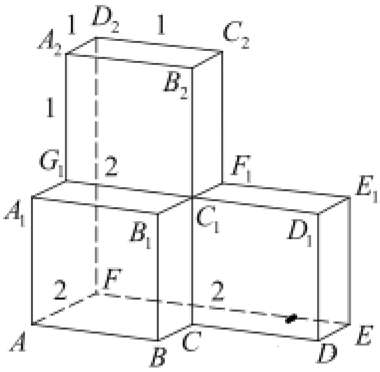
ВАРИАНТ 1

Часть 1

Ответом к заданиям 1-11 является целое число или конечная десятичная дробь.

1. Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.

2. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_2 .



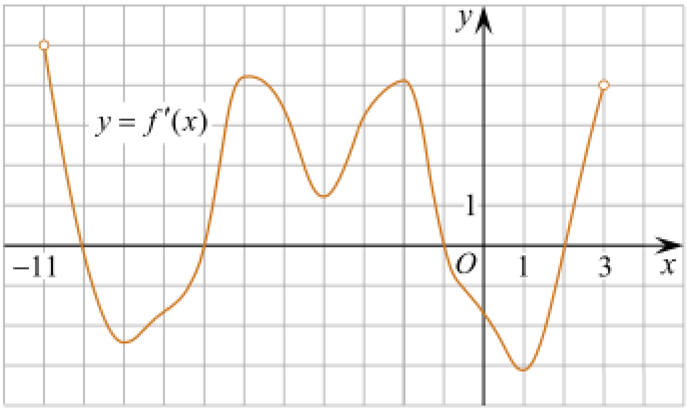
3. В классе 26 учащихся, среди них два друга - Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

4. В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

5. Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{3\sin\alpha-5\cos\alpha+2}{\sin\alpha+3\cos\alpha+6}=\dfrac{1}{3}$.

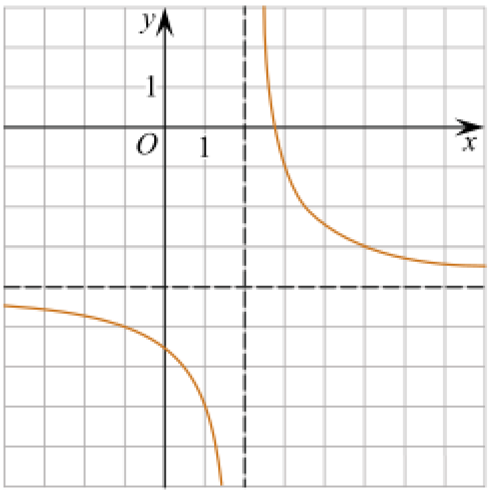
7. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале $(-11;3)$. Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.



8. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \dfrac{m}{m+M} v\cos\alpha$ (м/с), где $m = 80$ кг - масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг - масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

9. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

10. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \dfrac{a}{x+b} + c$, где числа a, b и c - целые. Найдите $f(10)$.



11. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;7]$.

Часть 2

Для заданий 12-18 запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное и обоснованное решение и ответ. Решение и ответы записывайте четко и разборчиво.

12. а) Решите уравнение $\sqrt{\sin x \cdot \cos x} = \cos x$.

ФИО ученика______________________________ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

13. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на боковых ребрах AA_1 и DD_1 взяты соответственно точки K и M так, что $AK : A_1K = 2:3$, $DM : D_1M = 4:1$.

а) Докажите, что плоскость BMK параллельна прямой AC.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BMK, если $AB = 8$, $AA_1 = 10$.

14. Решите неравенство: $\left|x^2 - 3x + 1\right| \geq \sqrt{4x^4 - 4x^2 + 1}$.

15. Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние?

Считайте, что перекресток не Т-образный, обе дороги продолжаются за перекрестком.

16. На стороне KM остроугольного треугольника PKM ($PK \neq PM$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту PS в точке T, $PS = 8$, $TS = 6$, H - точка пересечения высот треугольника PKM.

а) Найдите PH.

б) Полуокружность пересекает стороны PK и PM в точках L и N соответственно. Найдите коэффициент подобия треугольников PKM и PNL, если радиус полуокружности равен 20.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left| |x^2 - 6x + 5| - x^2 + 6x - 13 \right| < a - a^2 - (x-2)^2 + 2x - 4$$

имеет единственное целое решение.

18. На листочке записано 13 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 7, среднее арифметическое семи наибольших из них равно 16.

а) Может ли наименьшее из 13 чисел равняться 5?

б) Может ли среднее арифметическое всех 13 чисел равняться 12?

в) Пусть P — среднее арифметическое всех 13 чисел, Q - седьмое по величине число. Найдите наибольшее значение выражения $P - Q$.

ФИО ученика________________________________

ФИО ученика____
ФИО учителя____
Город/район____
Школа____

Таблица полученных ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

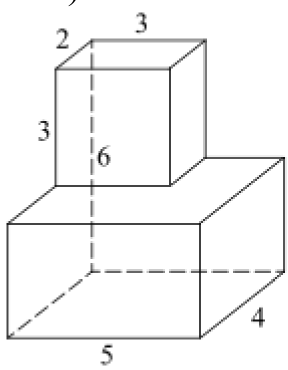
ВАРИАНТ 2

Часть 1

Ответом к заданиям 1-11 является целое число или конечная десятичная дробь.

1. В треугольнике ABC AD - биссектриса, угол C равен 50°, угол CAD равен 28°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

2. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



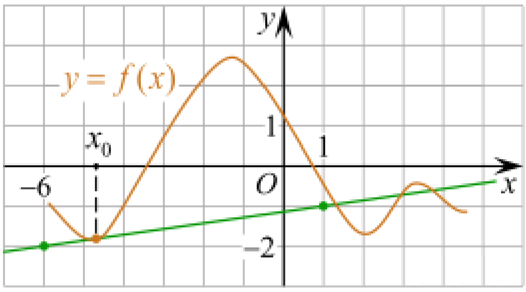
3. За круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.

4. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

5. Найдите корень уравнения $(2x+1)^2=(4-x)^2$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{12}{\sin^2 37°+\sin^2 127°}$.

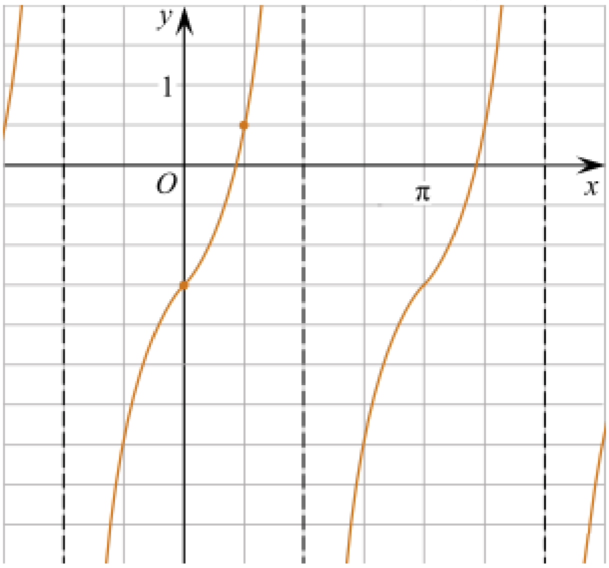
7. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции $g(x)=9f(x)-\dfrac{2}{7}x+7$ в точке x_0.



8. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы, определяемой по формуле $A(\omega)=\dfrac{A_0\omega_p^2}{\left|\omega_p^2-\omega^2\right|}$, где ω − частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 − постоянный параметр, $\omega_p=360c^{-1}$ − резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ выразите в c^{-1}.

9. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий - за 14 минут, а первый и третий - за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

10. На рисунке изображён график функции $f(x)=a\operatorname{tg}x+b$. Найдите a.



11. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{x^2+2x+6}$ на отрезке $[-2;1]$.

Часть 2

Для заданий 12-18 запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное и обоснованное решение и ответ. Решение и ответы записывайте четко и разборчиво.

12. а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие

ФИО ученика________________________________

отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка P лежит на ребре AA_1, причём $A_1P : PA = 3 : 4$, $BB_1 = 14$, $AD = 6$. Плоскость DPB_1 пересекает ребро CC_1 в точке N, тангенс угла между прямой NP и плоскостью основания $ABCD$ равен $\frac{1}{5}$.

а) Докажите, что четырехугольник DPB_1N - ромб.

б) Найдите площадь сечения DPB_1N.

14. Решите неравенство

$$\left(2x-3-\frac{5}{x}\right)\left(\frac{14}{x+1}+2+(\sqrt{-1-2x})^2\right)\geqslant 0.$$

15. 15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

16. Известно, что $ABCD$ трапеция, $AD = 2BC$, AD, BC - основания. Точка M такова, что углы ABM и MCD прямые.

а) Доказать, что $MA = MD$.

б) Расстояние от M до AD равно BC, а угол ADC равен 55°. Найдите угол BAD.

17. Найдите все значения параметра a, при которых функция

$$f(x)=\sin 2x-8(a+1)\sin x+(4a^2+8a-14)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

18. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

ФИО ученика________________________________

ФИО ученика____
ФИО учителя____
Город/район____
Школа____

Таблица полученных ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

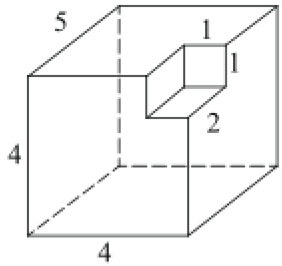
ВАРИАНТ 3

Часть 1

Ответом к заданиям 1-11 является целое число или конечная десятичная дробь.

1. Площадь параллелограмма *ABCD* равна 189. Точка *E* - середина стороны *AD*. Найдите площадь трапеции *AECB*.

2. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



3. Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

4. Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

5. Найдите корень уравнения $\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{2}{x-1}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

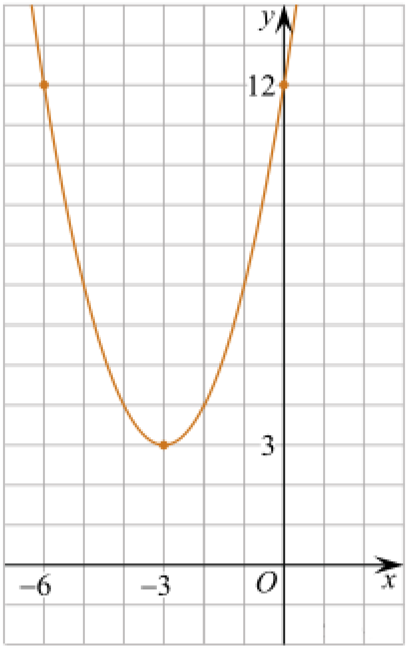
6. Найдите $h(5+x)+h(5-x)$, если $h(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-10}$.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$ (где x - расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

8. При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0=5$ м - длина покоящейся ракеты, $c=3\cdot10^5$ км/с - скорость света, а v – скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

9. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% меди, второй - 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

10. На рисунке изображён график функции вида $f(x)=ax^2+bx+c$, где числа a, b и c - целые. Найдите значение дискриминанта уравнения $f(x)=0$.



11. Найдите точку максимума функции $y=(2x-3)\cos x-2\sin x+5$, принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Часть 2

Для заданий 12-18 запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное и обоснованное решение и ответ. Решение и ответы записывайте четко и разборчиво.

12. а) Решите уравнение $2\cos^3 x-\cos^2 x+2\cos x-1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 6, на ребре AA_1 взята точка M так, что $\frac{AM}{MA_1}=\frac{1}{2}$. На ребре D_1C_1 взята точка N так, что $\frac{D_1N}{NC_1}=\frac{1}{2}$.

а) Докажите, что прямые MB_1 и CN перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой CN.

14. Решите неравенство

$$x^3+2x^2-\frac{24x^2-x+3}{x-3}\leqslant 1.$$

ФИО ученика________________________________

15. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент, свой для каждого банка. В начале года Степан положил 60% некоторой суммы денег в первый банк, а оставшуюся часть суммы во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 000 руб., а к концу следующего года 701 000 руб. Если бы Степан первоначально положил 60% своей суммы во второй банк, а оставшуюся часть в первый, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 610 000 руб. Какова была бы сумма вкладов в этом случае к концу второго года?

16. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем сторона CD - диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E, а окружность - в точке F, причем H - середина AE.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ - параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 3$ и $AH = 2\sqrt{2}$.

17. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0, \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

18. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

ФИО ученика______________________________