

1. Источник: ПВГ, 2013, Вариант 7, №4. Задача 12 из ЕГЭ.

Решите уравнение

$$\log_3(x+1) \cdot \log_3(2x-1) \cdot (3 - \log_3(2x^2 + x - 1)) = 1.$$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ 2x-1 > 0, \\ 2x^2+x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x < -1, \quad x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Для допустимых значений $x > 1/2$ имеем:

$$\log_3(x+1) > 0.$$

Если же $\log_3(2x-1) < 0$, т.е. $1/2 < x < 1$, то

$$\log_3(2x^2 + x - 1) < \log_3 2 < 3,$$

и потому $3 - \log_3(2x^2 + x - 1) > 0$ и левая часть уравнения отрицательна.

Таким образом, все три множителя левой части уравнения положительны и корни следует искать только среди тех x , для которых

$$\begin{cases} x > 1, \\ 2x^2 + x - 1 < 27 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 3,5).$$

Положим $t = \log_3(x+1)$, $p = \log_3(2x-1)$ и перепишем уравнение в виде

$$pt^2 - (3p - p^2)t + 1 = 0.$$

Так как $p > 0$ и дискриминант этого уравнения как квадратного относительно t равен

$$D(p) = (3p - p^2)^2 - 4p = p(p(3 - p)^2 - 4) = p(p^3 - 6p^2 + 9p - 4).$$

Сумма коэффициентов уравнения $p^3 - 6p^2 + 9p - 4 = 0$ равна нулю, значит $p = 1$ – корень.

$$\frac{p^3 - 6p^2 + 9p - 4}{p - 1} = p^2 - 5p + 4 = (p - 1)(p - 4).$$

$$D(p) = p(p - 1)^2(p - 4).$$

Условие существования корней:

$$\begin{cases} p > 0, \\ D(p) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \in \{1\} \cup [4; +\infty).$$

Но при $p \geq 4$: $x \geq 42$, поэтому $p = 1$ и $t = 1$, что выполнено, только если $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

2. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1985, вар. 1, №1). Задание №6 из ЕГЭ.

Определить, какое из двух чисел больше: $5^{\left(\frac{1}{2}\log_{25} 27 - \log_{1/5} 3\right)}$ или $3\sqrt{3}$.

Решение.

Показатель степени первого числа равен $\frac{7}{4}\log_5 3$, а само число есть $3^{7/4}$. Второе число равно $3^{3/2}$, и поскольку $\frac{7}{4} > \frac{3}{2}$, то первое число больше.

Ответ: первое число больше.

3. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1985, вар. 1, №2). Задание №14 из ЕГЭ.

Решить систему

$$\begin{cases} 27 = 2(x + 1)^2 + y^2, \\ 9 = xy + y. \end{cases}$$

Решение.

Заметим, что $y \neq 0$, поскольку при $y = 0$ не может выполняться второе уравнение системы. Выражая из него $x + 1 = \frac{9}{y}$ и подставляя в первое, получаем для определения y биквадратное уравнение $y^4 - 27y^2 + 162 = 0$. Его корнями относительно $z = y^2$ являются числа 9 и 18, отсюда и получается ответ.

Ответ: $(2; 3)$, $(-4; -3)$, $(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1; 3\sqrt{2})$, $(-\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1; -3\sqrt{2})$.

4. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1985, вар. 1, №3). Задание №16 из ЕГЭ.

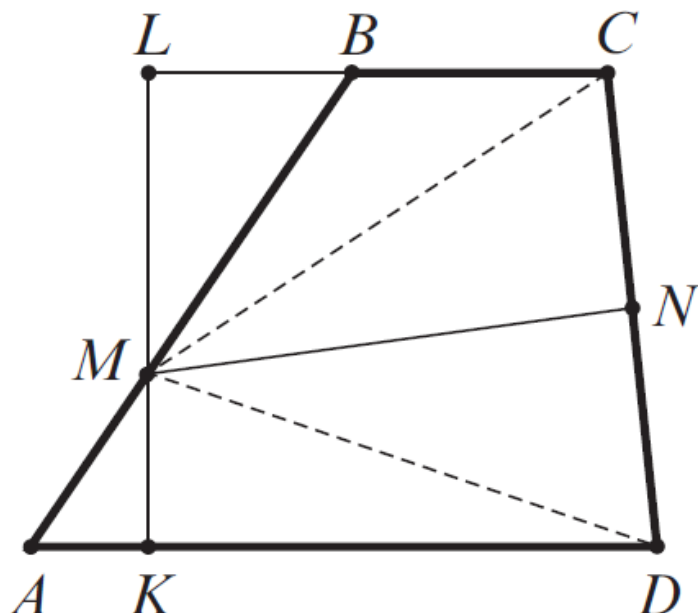
Основания BC и AD трапеции $ABCD$ таковы, что $AD = 3BC$. На сторонах AB и CD выбраны соответственно точки M и N так, что $BM = 2AM$ и прямая MN делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $CN:ND$.

Решение.

Проведем через точку M прямую, перпендикулярную основаниям трапеции; пусть L и K – точки её пересечения с прямыми BC и AD соответственно. Положим $BC = a$, тогда $AD = 3a$. Если высота трапеции равна h , то её площадь оказывается равной $2ah$, а площадь каждой из частей составляет ah .

Учитывая, что $BM = 2AM$, находим $ML = 2h/3$, $MK = h/3$. Следовательно, площадь треугольника MBC составляет $ah/3$, а треугольника AMD – $ah/2$. Поскольку четырехугольники $MBCN$ и $AMND$ – равновеликие и площадь каждого равна ah , то оставшиеся их части – треугольники MCN и MND – имеют соответственно площади $2ah/3$ и $ah/2$. Высота, проведенная из вершины M , для этих треугольников общая, поэтому отношение их площадей равно отношению оснований CN и ND , т.е. $CN:ND = 4:3$.

Ответ: 4:3.



5. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1985, вар. 1, №4). Задание №12 из ЕГЭ.

Решить уравнение $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 7x$.

Решение.

Замечая, что $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, приводим уравнение к виду $\cos 7x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Преобразуя разность косинусов в произведение, получим $\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$. Отсюда следует две серии решений, которые и записываются в ответ.

Ответ: $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}, \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

6. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1985, вар. 1, №5). Задание №13 из ЕГЭ.

Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 1. Точка M выбрана на ребре AB так, что $AM = 2MB$, точка N – середина ребра A_1C_1 . Через вершину C и точки M и N проведена плоскость α . Определить двугранный угол между плоскостью α и плоскостью основания ABC .

Решение.

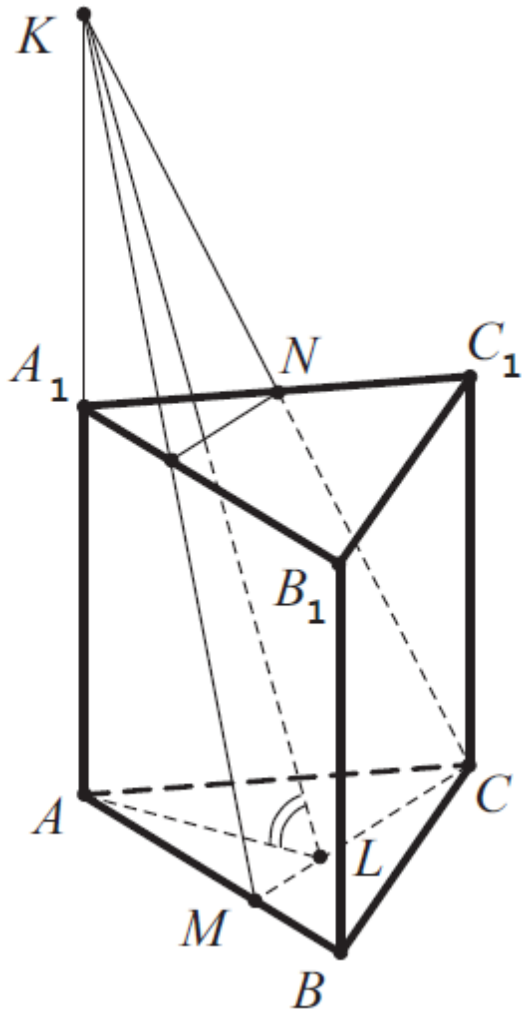
Пусть плоскость α пересекает прямую AA_1 в точке K . Так как N – середина ребра A_1C_1 , а прямые A_1C_1 и AC параллельны, то $AK:A_1K = AC:A_1N = 2$. Отсюда следует, что $AK = 2$.

Опустим из точки A перпендикуляр AL на прямую CM . Прямая AK перпендикулярна плоскости ABC , поэтому AL – проекция KL на эту плоскость. Значит, KL – перпендикуляр к CM и угол ALK – плоский угол двугранного угла между α и плоскостью основания.

В треугольнике AMC : $AC = 1$, $AM = 2/3$, $\angle A = 60^\circ$, отсюда по теореме косинусов $CM = \sqrt{7}/3$. Площадь S этого треугольника равна $\frac{1}{2}AM \cdot AC \cdot \sin 60^\circ$, т.е. $S = \sqrt{3}/6$. С другой стороны, $S = \frac{1}{2}AL \cdot CM$, поэтому $AL = \sqrt{3/7}$. Пусть $\angle ALK = \varphi$, тогда

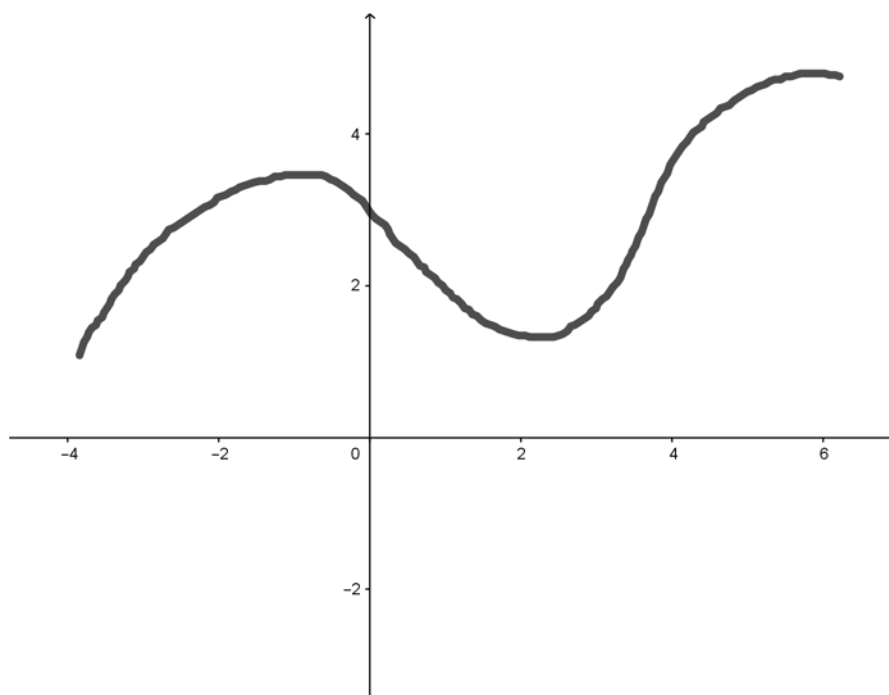
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AK}{AL} = 2\sqrt{7/3}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 2\sqrt{7/3}$.



7. Источник: придумана самостоятельно. Задача 7 из ЕГЭ.

На рисунке изображен график непрерывной и дифференцируемой функции $y = f(x)$. Сколько корней имеет уравнение $f'(x) = 0$ на интервале $(-2; 4)$?



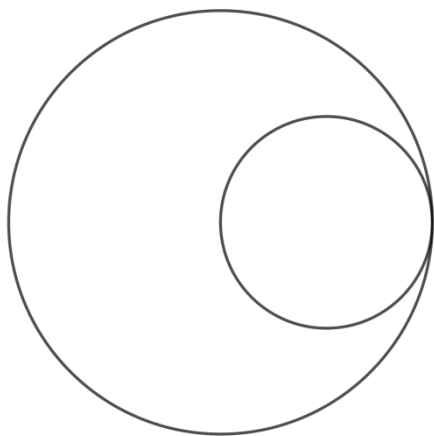
Решение.

Количество нулей производной есть количество "горок" и "впадинок" графика самой функции. Нетрудно посчитать, что "горок" и "впадинок" на указанном интервале в сумме 2.

Ответ: 2.

8. Источник: придумана самостоятельно. Задача 2 из ЕГЭ.

Из круга площадью 33 вырезали круг вдвое меньшего радиуса (см. рис.). Найдите площадь оставшейся части круга.



Решение.

Площадь круга вдвое меньшего радиуса будет в 4 раза меньше площади исходного круга, поэтому

$$S = 33 - \frac{1}{4} \cdot 33 = 24,75.$$

Ответ: 24,75.

9. Источник: придумана самостоятельно. Задача 1 из ЕГЭ проф. уровня.

Стороны треугольника равны 6, 7 и 8. Найдите квадрат длины биссектрисы, проведенной к большей стороне. При необходимости ответ округлите до целых.

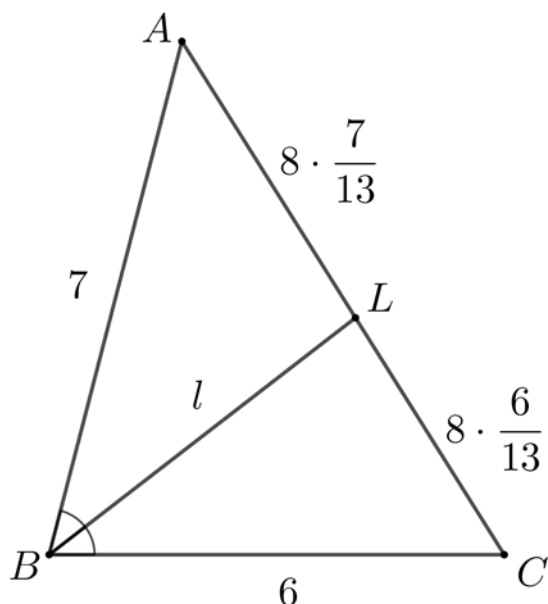
Решение.

Известно, что биссектриса треугольника разбивает сторону на отрезки, пропорциональные сторонам угла.

Остается воспользоваться формулой биссектрисы:

$$\begin{aligned} BL^2 &= AB \cdot BC - AL \cdot CL = \\ &= 42 - \frac{2688}{169} = \frac{4410}{169} = 26 \frac{16}{169} \approx 26. \end{aligned}$$

Ответ: 26.



10. Источник: придумана самостоятельно. Задача 6 из ЕГЭ проф. уровня.

Найдите значение выражения $\ln e^\pi - 2 \arcsin 1$.

Решение.

$$\ln e^\pi - 2 \arcsin 1 = \pi \ln e - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi - \pi = 0.$$

Ответ: 0.