

Графики функций

Для начала вспомним простейшие графики функций, которые нам могут пригодиться. Существует всего пять типов элементарных функций:

1. Степенные

К этому типу относятся линейные, квадратичные, кубические, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$. Все они содержат выражения вида x^a

2. Показательные

Это функции вида $y = a^x$

3. Логарифмические

$y = \log_a x$

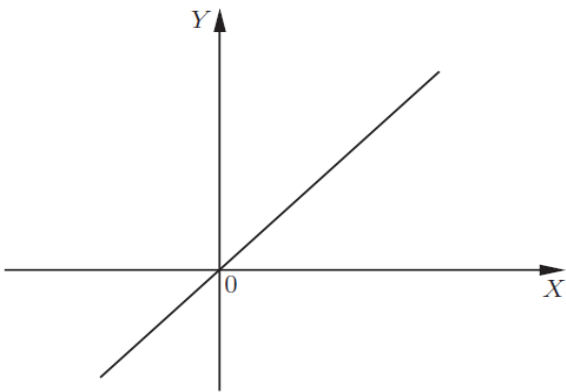
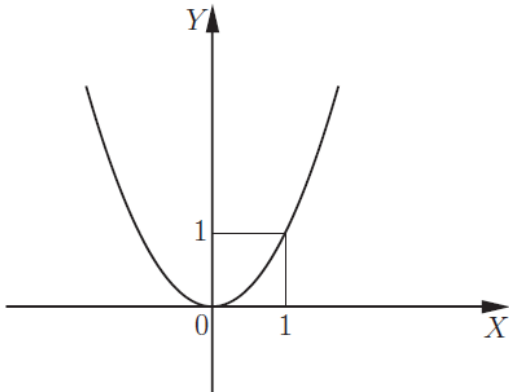
4. Тригонометрические

В их формулах присутствуют синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

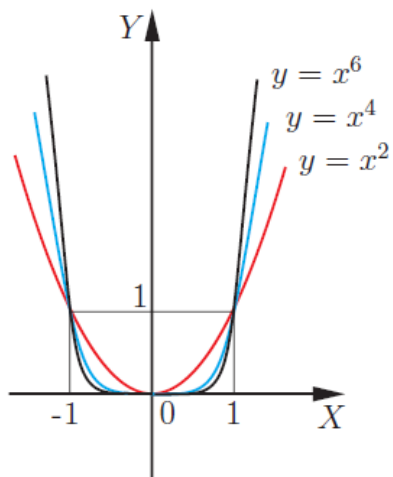
5. Обратные тригонометрические

Содержат $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg} x$.

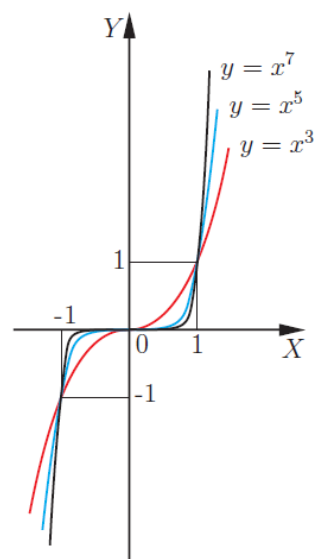
Степенные функции

1. Линейная функция $y = x$	2. Квадратичная функция $y = x^2$
	

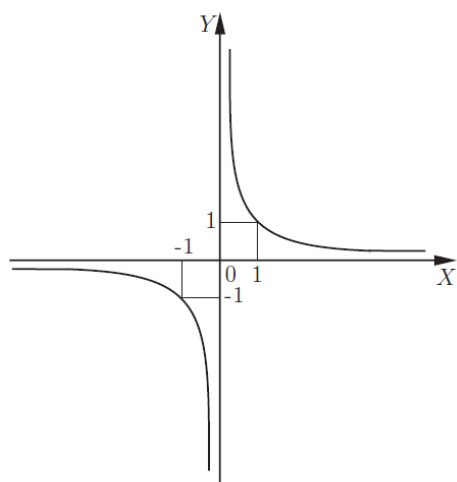
3. Функция, $y = x^n$
 n - натуральное, $n > 1$
 n - чётное, $n = 2, 4, 6, \dots$



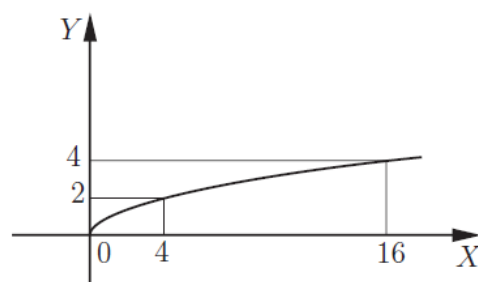
n - нечётное
 $n = 3, 5, 7, \dots$



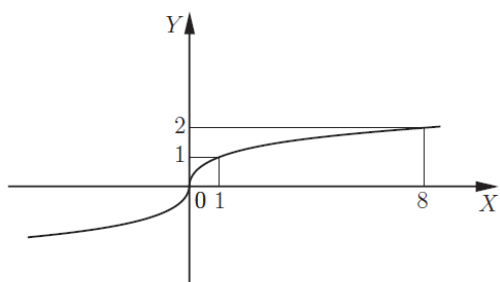
4. Гипербола $y = \frac{1}{x}$



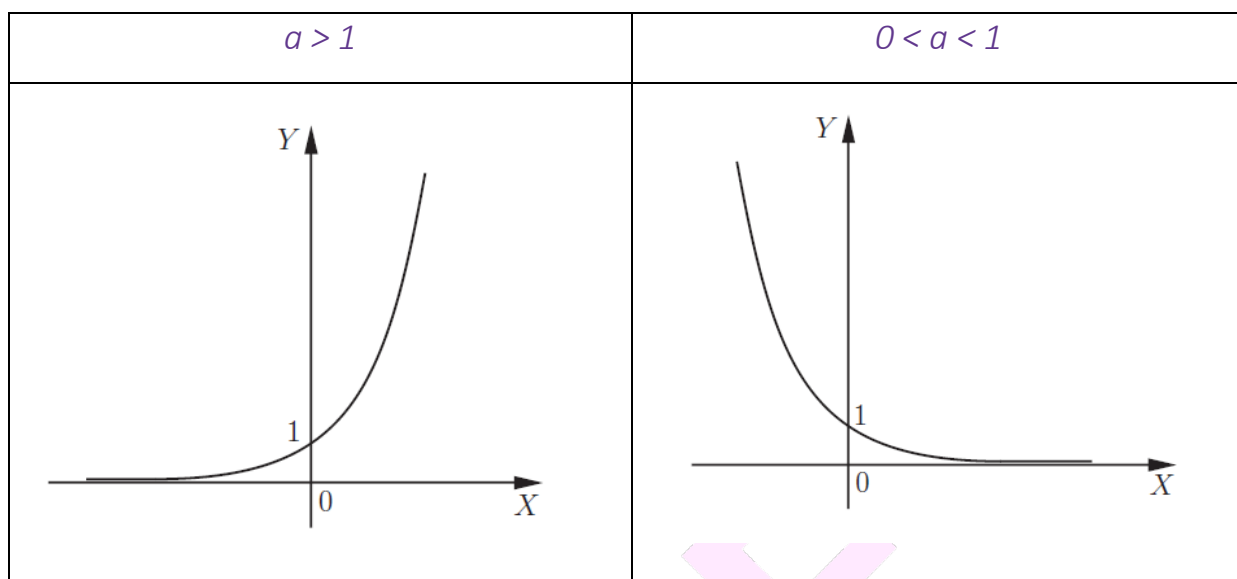
$y = \sqrt{x}$



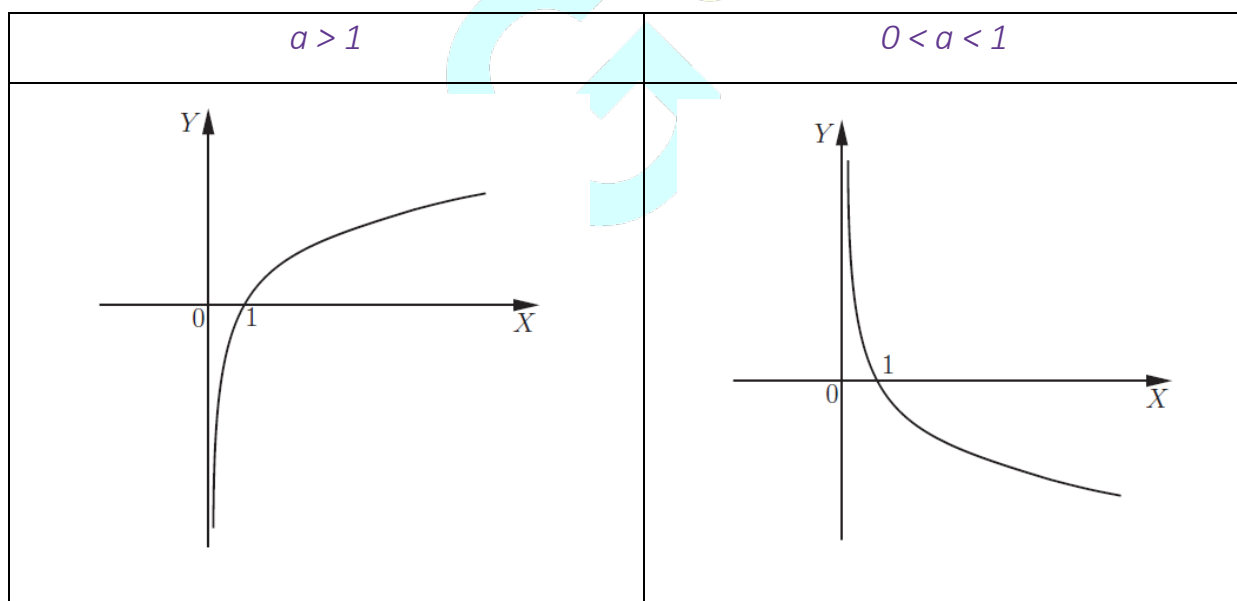
$y = \sqrt[3]{x}$



Показательная функция $y = a^x$

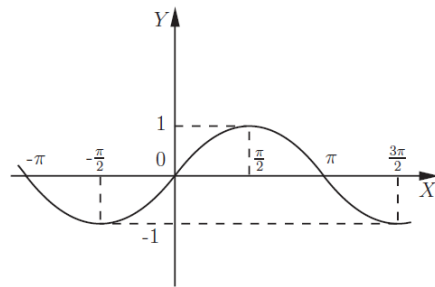


Логарифмическая функция $y = \log_a x$

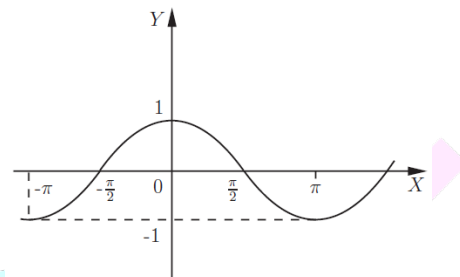


Тригонометрические функции

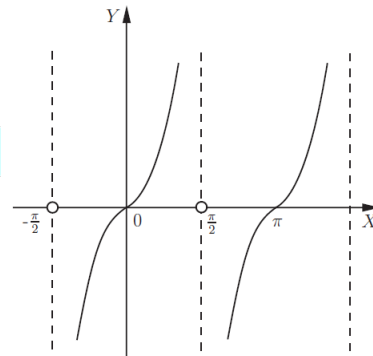
$$y = \sin x$$



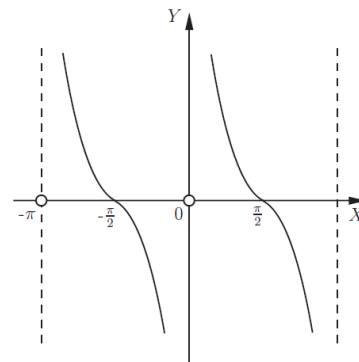
$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$

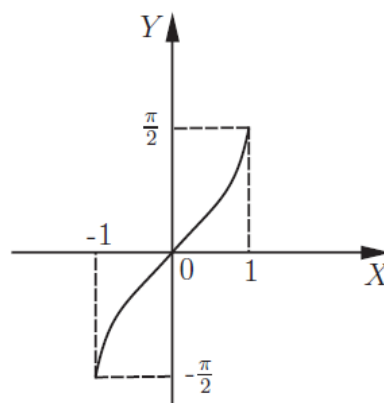


$$y = \operatorname{ctg} x$$

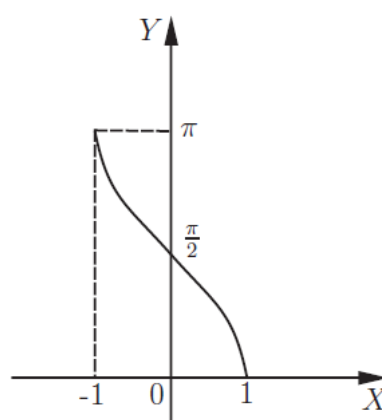


Обратные тригонометрические функции

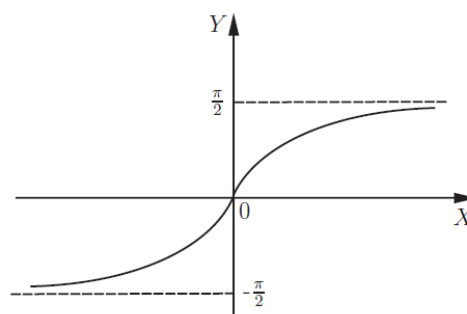
$$y = \arcsin x$$



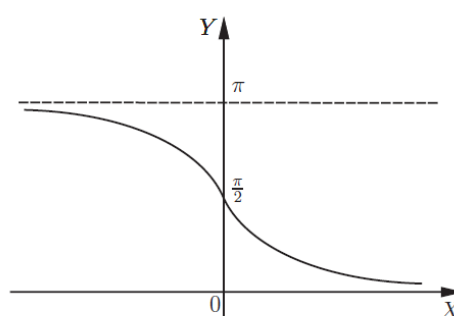
$$y = \arccos x$$



$$y = \arctg x$$



$$y = \text{arcctg} x$$



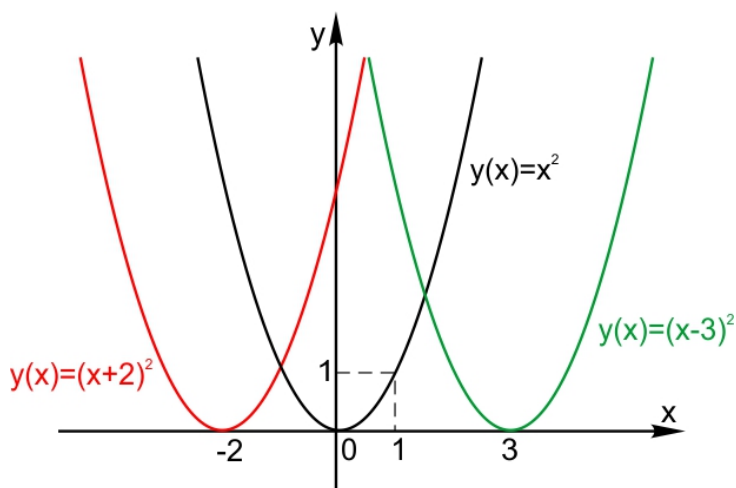
С графиками элементарных функций разобрались. Теперь посмотрим, как их можно преобразовывать.

Начнем со сдвигов графиков по X и по Y .

Сдвиг по горизонтали

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $a > 0$. Тогда график функции $y = f(x - a)$ сдвинут относительно исходной на a вправо.

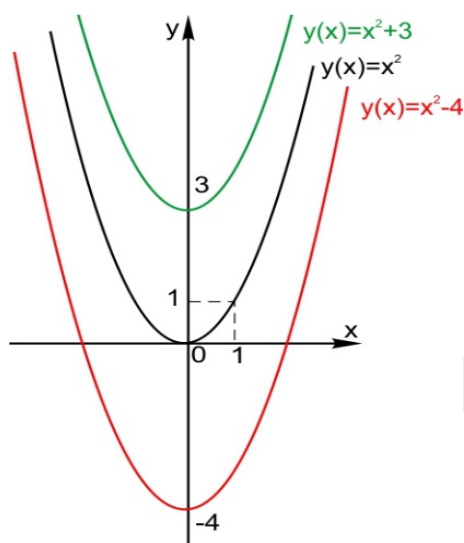
График функции $y = f(x + a)$ сдвинут относительно исходной на a влево.



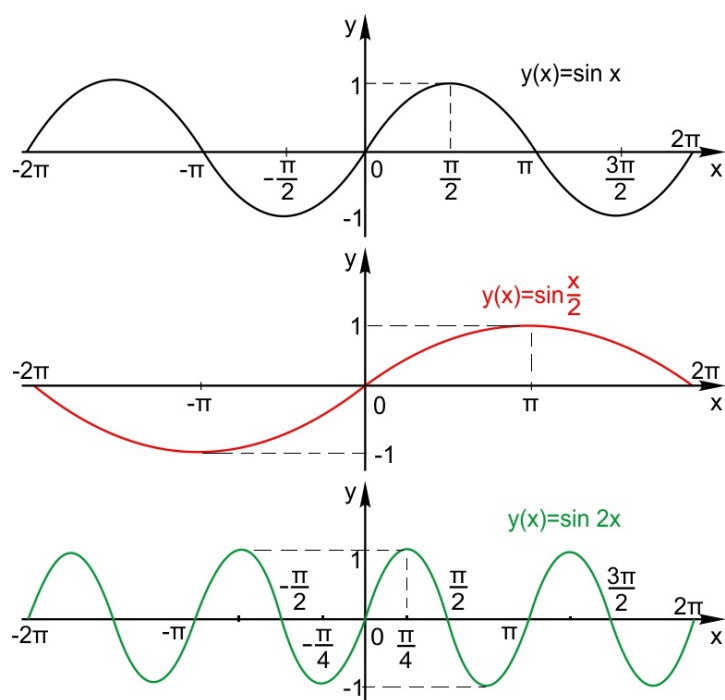
Сдвиг по вертикали

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и C — некоторое положительное число. Тогда график функции $y = f(x) + C$ сдвинут относительно исходного на C вверх. График функции

$y = f(x) - C$ сдвинут относительно исходного на C вниз.



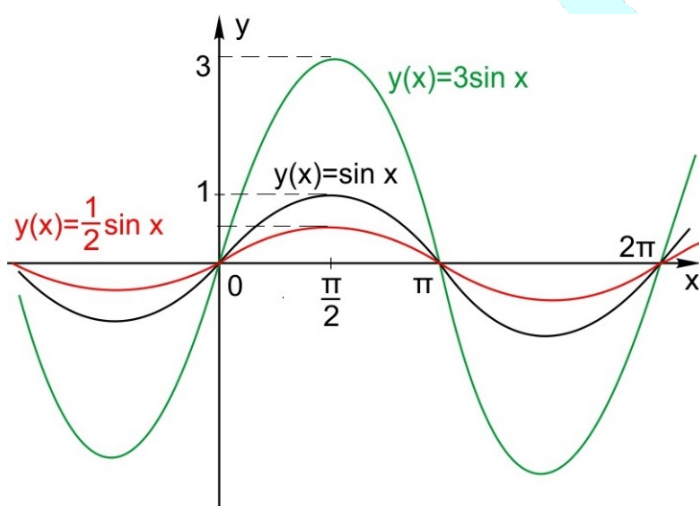
Растяжение (сжатие) по горизонтали



Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $k > 0$. Тогда график функции

$y = f(x)$ растянут относительно исходного в k раз по горизонтали, если $0 < k < 1$, и сжат относительно исходного в k раз по горизонтали, если $k > 1$.

Растяжение (сжатие) по вертикали

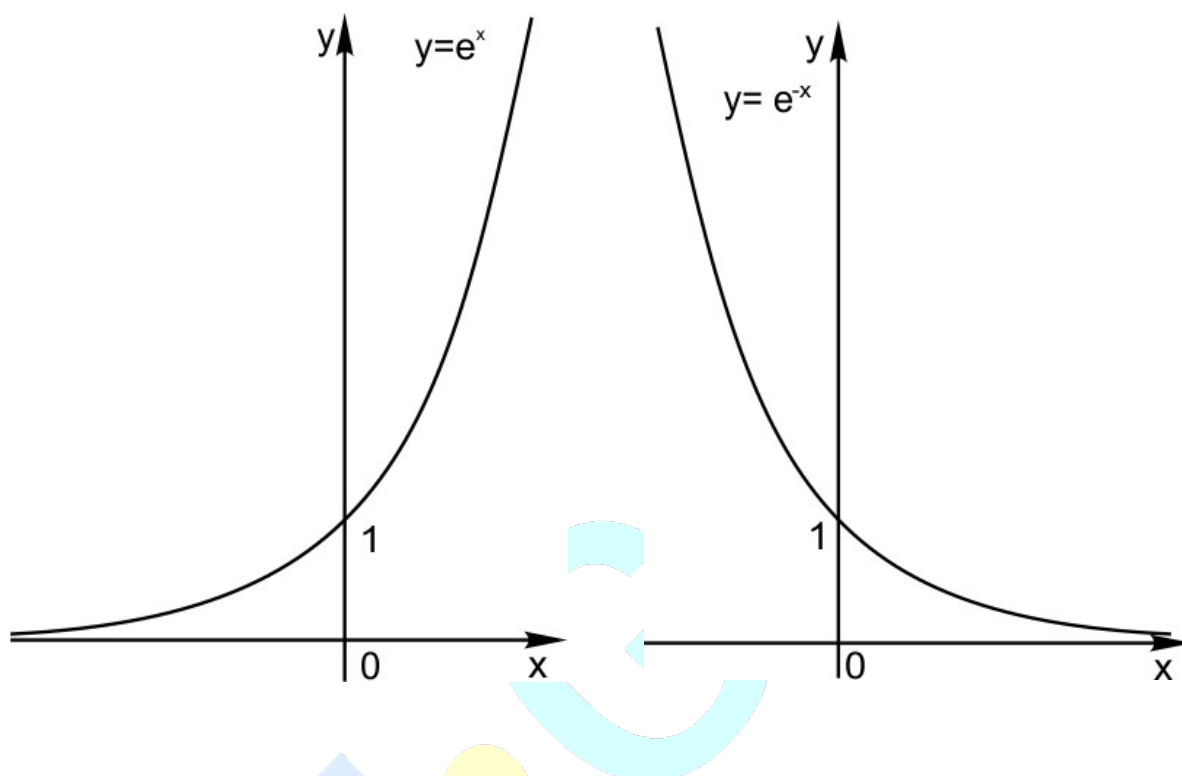


Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $M > 0$. Тогда график функции $y = M * f(x)$ растянут относительно исходного в M раз по вертикали, если $M > 1$, и сжат относительно исходного в M раз по вертикали, если $0 < M < 1$.

Отражение по горизонтали

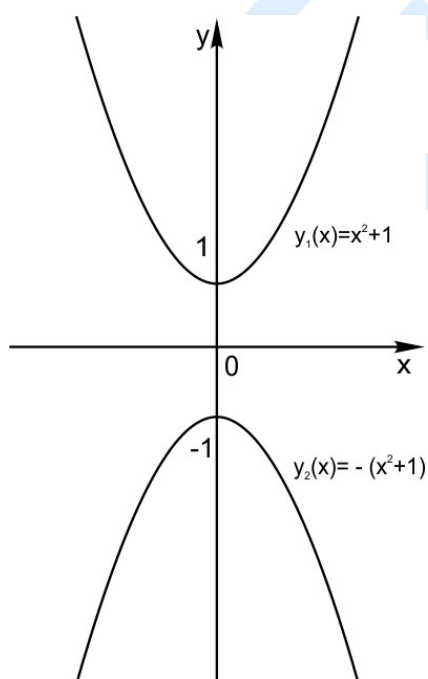
График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции

$y = f(x)$ относительно оси Y .



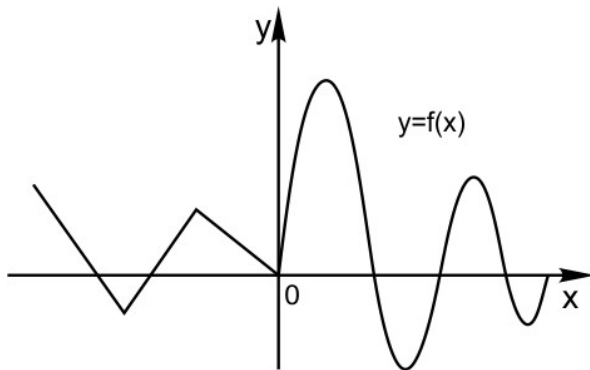
Отражение по вертикали

График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси X .



Графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

На рисунке изображен график функции $y = f(|x|)$. Она специально взята такая — несимметричная относительно нуля.

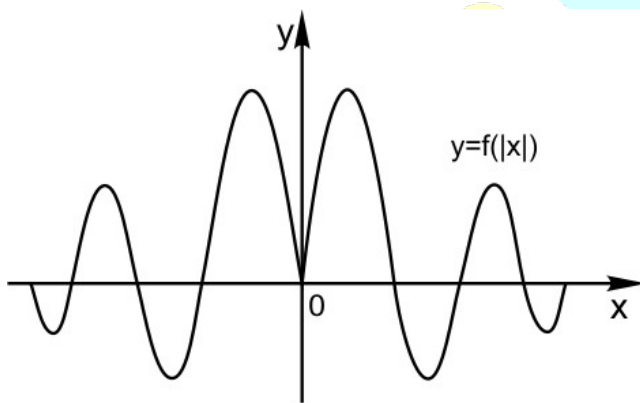


Построим график функции $y = f(|x|)$.

Конечно же, мы пользуемся определением модуля.

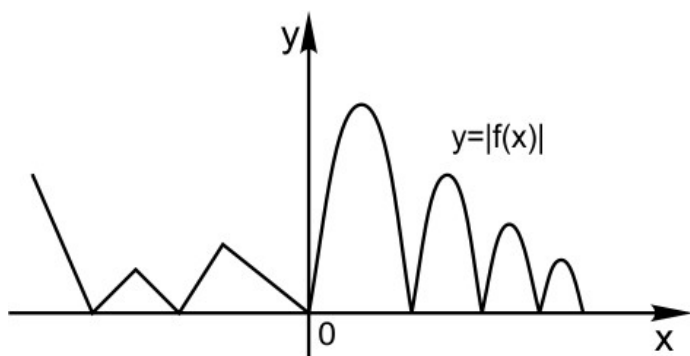
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Для неотрицательных значений x график остался таким же, как был. А вместо каждого отрицательного x мы взяли противоположное ему положительное число. И поэтому вся та часть графика функции, что лежала слева от оси X , заменилась на зеркально отраженную правую часть графика.



Теперь график функции $y = |f(x)|$

Вся часть графика, лежащая ниже оси X , зеркально отражается в верхнюю полуплоскость. А верхняя часть графика, лежащая выше оси X , остается на месте.



Как определить по формуле функции, будет график преобразован по горизонтали (по X) или по вертикали (по Y)? Разница очевидна. Если сначала мы что-либо делаем с

аргументом x (прибавляем к нему какое-либо число, умножаем на какое-либо число или берем модуль) — преобразование по X . Если сначала мы нашли функцию, а затем уже к значению функции что-то прибавили, или на какое-нибудь число умножили, или взяли модуль, — преобразование по Y .