Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

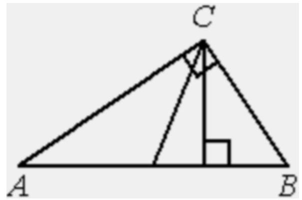
Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

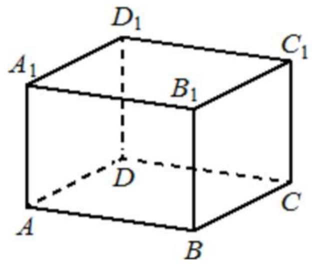
Часть 1

1 Острые углы прямоугольного треугольника равны 84° и 6°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ___________________________.

2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=5$, $BC=4$, $AA_1=3$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 221031

3

В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные – жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ___________________________.

4

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с командами «Протор», «Ротор» и «Мотор». Найдите вероятность того, что «Стартер» будет начинать только вторую и последнюю игры.

Ответ: ___________________________.

5

Найдите корень уравнения

$\sqrt{28-2x}=2.$

Ответ: ___________________________.

6

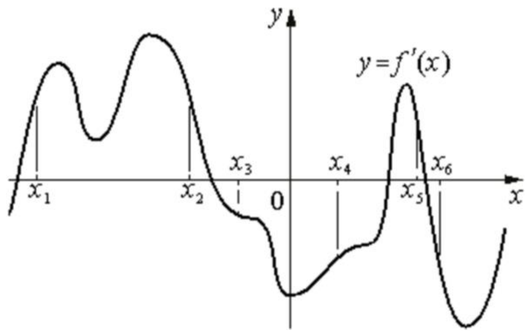
Найдите

$\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{41}}{41}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

7

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ: ___________________________.

8

Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, прошедшее после начала работы лебёдки, $\omega=50$ град./мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=4$ град./мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Определите время, прошедшее после начала работы лебёдки, если известно, что за это время угол намотки φ достиг $2500°$. Ответ дайте в минутах.

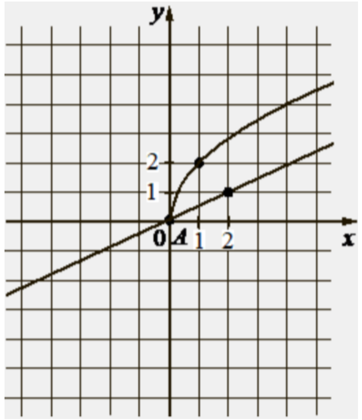
Ответ: ___________________________.

9

Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ___________________________.

10 На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: ____________________________.

11 Найдите наибольшее значение функции

$y = (x+10)^2 x + 7$ на отрезке $[-12; -6]$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания* 12–18 *используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №* 2. *Запишите сначала номер выполняемого задания* (12, 13 *и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\log_5(2-x) = \log_{25} x^4.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

13 Точка E лежит на высоте SO, а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE:EO = SF:FC = 2:1$.

а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF, если $AB = 8$, $SO = 14$.

14 Решите неравенство

$$\log_{11}(8x^2+7) - \log_{11}(x^2+x+1) \geq \log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right).$$

15 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 221031

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB:BC = AP:PD$.
б) Найдите площадь треугольника COD, где $O -$ центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что $BD -$ диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a+7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

18 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	78
2	30
3	0,55
4	0,125
5	12
6	0,8
7	3
8	25
9	27
10	16
11	7
12	а) $1, -2$ б) -2
13	$\frac{88\sqrt{2}}{3}$
14	$(-\infty; -12] \cup \left(-\frac{35}{8}; 0\right]$
15	11
16	$18\sqrt{3}$
17	$\{-5; -9\}$
18	а) да б) 9 в) $\frac{9}{17}$

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12 а) Решите уравнение

$$\log_5(2-x) = \log_{25} x^4.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2019
Основная волна 2014

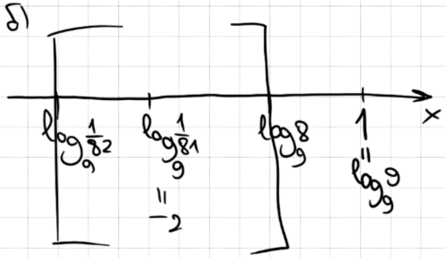
а) $\log_5(2-x) = \log_{5^2}(x^2)^2$

$\log_5(2-x) = \log_5 x^2$

$\begin{cases} 2-x = x^2 \\ 2-x>0 \\ x^2>0 \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array} \right. \\ x<2 \\ x\neq 0 \end{array} \right.$

Получаем $x=1$, $x=-2$

б)



Получаем $-2 \in$, $-1 \notin$

Ответ: а) $1; -2$ б) -2

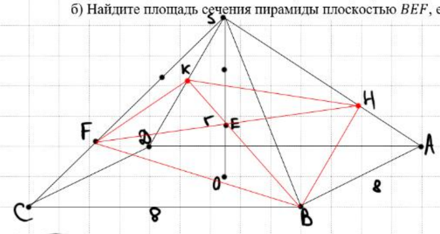
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 Точка E лежит на высоте SO, а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE:EO = SF:FC = 2:1$.

а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.

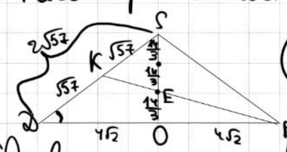
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF, если $AB = 8$, $SO = 14$.

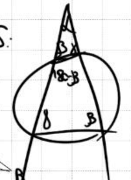
Источники:
Досрочная волна 2021



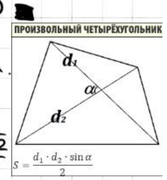
а) Построим сеч.
① BF
② BE
$BE \cap SD = K$
③ FE
$FE \cap AS = H$
④ FK
⑤ KH
⑥ BH
FKHB – сечение

② Рассмотрим $\triangle BDS$





SO – высота и медиана
$\Rightarrow$ E – точка пересечения медиан
$\Rightarrow$ BK – медиана
$\Rightarrow$ K – середина SD



б) ① $\triangle SEF \sim \triangle SOC$ по 2 п.
$\Rightarrow \angle SFE = \angle SCO$ (соотв.)
$\Rightarrow FE \parallel OC$
$\Rightarrow FH \parallel AC$

$FH = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 8\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

② BK – наклонная
BD – проекция
$BD \perp AC$ $\Rightarrow BD \perp FH$
$\Rightarrow BK \perp FH$ по ТТП

Ответ: $\frac{88\sqrt{2}}{3}$

③ $\cos\angle SDB = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{57}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}}$

$BK = \sqrt{(\sqrt{57})^2 + (8\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{57}\cdot 8\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}}} = 11$

$S = \frac{11 \cdot \frac{16\sqrt{2}}{3}}{2} \cdot 1 = \frac{88\sqrt{2}}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство $(x+0{,}5)^2+0{,}75$

$$\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\ge\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right).$$

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Основная волна 2018

Заметим, что $8x^2+7$ и $x^2+x+1>0$ при любых x

$$\log_{11}\frac{8x^2+7}{x^2+x+1}\ge\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$$

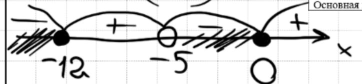
$$\begin{cases}① \dfrac{8x^2+7}{x^2+x+1}\ge\dfrac{x}{x+5}+\dfrac{7}{1}^{(x+5} \\ ② \dfrac{x}{x+5}+7>0\end{cases}$$

① $\dfrac{8x^2+7}{x^2+x+1}^{(x+5)}\ge\dfrac{8x+35}{x+5}^{(x^2+x+1}$

$$\frac{\cancel{8x^3}+40x^2+7x+\cancel{35}-\cancel{8x^3}-8x^2-8x-35x^2-35x-\cancel{35}}{(x^2+x+1)(x+5)}\ge0$$

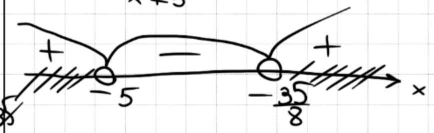
$$\frac{-3x^2-36x}{(x^2+x+1)(x+5)}\ge0 \quad \Big|:(-3)$$

$$\frac{x^2+12x}{(x^2+x+1)(x+5)}\le0$$

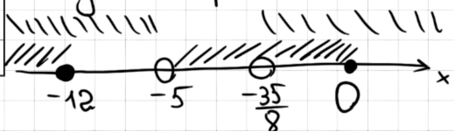


② $\dfrac{x}{x+5}+\dfrac{7}{1}^{(x+5}>0$

$$\frac{8x+35}{x+5}>0$$



Найдём пересечение:



Ответ: $(-\infty;-12]\cup\left(-\frac{35}{8};0\right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

DEF632

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2020
СтатГрад 27.01.2022
СтатГрад 29.01.2020
Досрочная волна 2019
СтатГрад 24.01.2019
СтатГрад 26.01.2017
Досрочная волна (Резерв) 2017
Основная волна 2016

Пусть март – месяц платежа

Дата	Сумма долга	
и 16	S	
я 17	$1{,}25S$	
м 17	$\Rightarrow$ Было выплачено	$0{,}55S$
и 17	$0{,}75S$	
я 18	$0{,}75S\cdot1{,}25=0{,}875S$	
м 18	$\Rightarrow$ Σ.В.	$0{,}475S$
и 18	$0{,}4S$	
я 19	$0{,}4S\cdot1{,}25=0{,}5S$	
м 19	$\Rightarrow$ ΣВ	$0{,}5S$
и 19	0	

Ответ: 11

$$\begin{cases}\dfrac{55}{100}\cdot S>5 & \Big|:\dfrac{55}{100}\\[2mm] \dfrac{475}{1000}\cdot S>5 & \Big|:\dfrac{475}{1000}\\[2mm] \dfrac{5}{10}\cdot S>5 & \Big|:\dfrac{5}{10}\end{cases}$$

$$\begin{cases}S>\dfrac{\cancel{5}\cdot100}{\cancel{55}\,11}\\[2mm] S>\dfrac{\cancel{5}\cdot\frac{200}{1000}}{19\,\cancel{95}\,\cancel{475}}\\[2mm] S>\dfrac{\cancel{5}\cdot10}{\cancel{5}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}S>9\frac{1}{11}\\ S>10\frac{10}{19}\\ S>10\end{cases}\Rightarrow S_{\text{наим. цел.}}=11$$

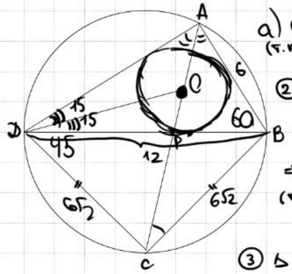
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Основная волна 2015



а) ① $\angle ADB = \angle ACB$ (т.к. опирается на $\smile AB$)

② $\smile CD = \smile BC$ (т.к. равные хорды стягивают равные дуги)

$\Rightarrow \angle DAC = \angle BAC$ (т.к. опир. на равные дуги)

③ $\triangle ABC \sim \triangle APD$ по 2 углам ($\angle DAC = \angle BAC$, $\angle ADB = \angle ACB$)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AP} = \dfrac{BC}{PD} \quad \Big| \cdot \dfrac{BC}{AP}$

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AP}{PD}$

б) ① AP — биссектриса $\triangle ABD$ $\Rightarrow$ O лежит на AP

② $BD = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = 12$

③ $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ — прямоуг. (опир. на диаметр)

④ $\triangle ABD$:
$\angle ADB = 30^\circ$
$\angle ABD = 60^\circ$

⑤ $\angle ODC = \underbrace{15 + 45}_{\angle ODP + \angle CDP} = 60^\circ$

$\angle DCO = 60^\circ = \angle ABD$

$\Rightarrow \triangle COD$ — равносторонний

$S = \dfrac{\sqrt{3} \cdot (6\sqrt{2})^2}{4} = 18\sqrt{3}$

Ответ: $18\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a+7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2015
Основная волна 2013

$x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7| = 0$

$f(x) = x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7|$

$f(-x) = (-x)^2 + (a+7)^2 - |-x-7-a| - |-x+a+7|$
$= x^2 + (a+7)^2 - |x+7+a| - |x-a-7|$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ ф-ция $f(x)$ - чётная

Единственный корень чётная ф-ция может иметь только если этот единств. корень $x=0$

Найдём при каких a $x=0$ будет являться корнем ур-я.

$0^2 + (a+7)^2 = |0-7-a| + |0+a+7|$

$(a+7)^2 = |a+7| + |a+7|$

$|a+7|^2 - 2|a+7| = 0$

$|a+7| \cdot (|a+7| - 2) = 0$

$|a+7| = 0 \qquad |a+7| = 2$

$a = -7 \qquad a = -5 \qquad a = -9$

Проверим, при каких из этих a будет единств. корень

Если $a = -5$, то

$x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$

$|x-2|$: $-$ $-$ $+$
$|x+2|$: $-$ $+$ $+$ (-2, 2, x)

Если $x < -2$, то $x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$
$x^2 + 2x + 4 = 0$
$\varnothing$

Если $-2 \le x \le 2$, то $x^2 + 4 = -x + 2 + x + 2$
$x = 0$

Если $x > 2$, то $x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$
$x^2 - 2x + 4 = 0$
$\varnothing$

$\Rightarrow$ при $a = -5$ будет единств. корень $x=0$

Ответ: -5 ; -9

Если $a = -7$, то

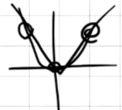
$x^2 = 2|x|$

$|x|^2 - 2|x| = 0$

$|x| \cdot (|x| - 2) = 0$

$x = 0 \qquad x = 2 \qquad x = -2$

$\Rightarrow$ при $a = -7$ будет 3 корня



Если $a = -9$, то

$x^2 + 4 = |x+2| + |x-2|$

$x = 0$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 221031

Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2012

5408D9

В театре число мальчиков $\le \frac{2}{11}$ посетивших театр
В кино число мальчиков $\le \frac{2}{5}$ посетивших кино

Нужно максимизировать количество девочек в театре и в кино

а) В группе 9 мальчиков 11 девочек
Пусть все мальчики ходят на 1 мероприятие
все девочки ходят на оба

Если 4 мальчика в театре $\frac{4}{15} > \frac{2}{11}$
Если 3 мальчика в театре $\frac{3}{14} > \frac{2}{11}$

Если 2 мальчика в театре $\frac{2}{13} < \frac{2}{11}$
$\Rightarrow$ Мальчиков в театре ≤ 2

Если 7 мальчиков в кино $\frac{7}{18} < \frac{2}{5}$
$\Rightarrow$ Мальчиков в кино ≤ 7

Ответ: а) да, если 2 в театре и 7 в кино

б) 9 точно может быть (см. а)
Пусть было 10 мал. и 10 дев.

Если 3 мал. в театре $\frac{3}{13} > \frac{2}{11}$
2 мал. в театре $\frac{2}{12} < \frac{2}{11}$
$\Rightarrow$ мальчиков в театре ≤ 2

Если 8 мал в кино $\frac{8}{18} > \frac{2}{5}$
7 мал в кино $\frac{7}{17} > \frac{2}{5}$
6 мал. в кино $\frac{6}{16} > \frac{2}{5}$
$\Rightarrow$ мальчиков в кино ≤ 6
$\Rightarrow$ 10 и более мальчиков быть не может

Ответ:
а) да
б) 9
в) $\frac{9}{17}$

в) $\left(\frac{d}{m_т + m_к + d}\right)_{наим.} - ?$ $\quad | : d$

$\left(\frac{1}{\frac{m_т}{d} + \frac{m_к}{d} + 1}\right)_{наим}$

Найдём наибольшие значения $\frac{m_т}{d}$ и $\frac{m_к}{d}$

$\frac{m_т}{m_т + d} \le \frac{2}{11} \quad | \cdot 11(m_т + d)$

$11 m_т \le 2 m_т + 2d$
$9 m_т \le 2d \quad | : 9d$
$\frac{m_т}{d} \le \frac{2}{9}$

$\frac{m_к}{m_к + d} \le \frac{2}{5} \quad | \cdot 5(m_к + d)$

$5 m_к \le 2 m_к + 2d$
$3 m_к \le 2d \quad | : 3d$
$\frac{m_к}{d} \le \frac{2}{3}$

ПОЛУЧАЕМ:

$\frac{1}{\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{17}{9}} = \frac{9}{17}$

Пример: $M_т = 2$
$M_к = 6$
$d = 9$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 221031

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.