

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

10	-	0	,	8															
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

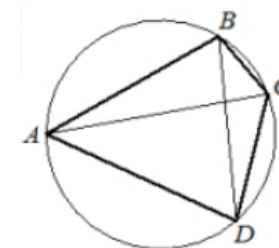
Справочные материалы

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 61° , угол CAD равен 37° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

- 2** Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



Ответ: _____.



- 3 Фабрика выпускает сумки. В среднем 6 сумок из 75 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Ответ: _____.

- 4 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения

$$(x + 9)^2 = 36x.$$

Ответ: _____.

- 6 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_5 2}{\log_5 13} + \log_{13} 0,5.$$

Ответ: _____.

- 7 Прямая $y = -3x - 5$ является касательной к графику функции $y = x^2 + 7x + c$. Найдите c .

Ответ: _____.

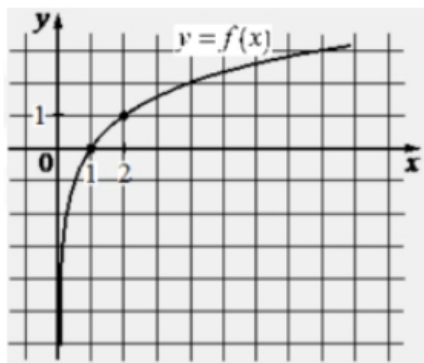
- 8 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 120 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит 320 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Ответ: _____.

- 9 Первый час автомобиль ехал со скоростью 115 км/ч, следующие три часа – со скоростью 45 км/ч, а затем два часа – со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 10 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.



Ответ: _____.

- 11 Найдите наибольшее значение функции $y = 33x - 30 \sin x + 29$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

- 13 Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

- а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

- 14 Решите неравенство

$$\log_2(4x^2 - 1) - \log_2 x \leq \log_2\left(5x + \frac{9}{x} - 11\right).$$

- 15 Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15\,000 - P$, $1\,000 \leq P \leq 15\,000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?



16 Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает диагональ BD в точке K .

- а) Докажите, что произведение $CK \cdot CE$ равно площади квадрата.
б) Найдите отношение $CK:KE$, если $\angle ECD = 15^\circ$.

17 Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

18 Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел, последние цифры которых не равны нулю, поделили на его последнюю цифру. Сумма получившихся чисел равна S .

- а) Может ли S быть равной $16\frac{5}{6}$?
б) Может ли S быть равной $369\frac{29}{126}$?
в) Найдите наибольшее целое значение S , если каждое из исходных чисел было трёхзначным.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	98
2	3
3	0,92
4	0,6
5	9
6	0
7	20
8	8
9	55
10	4
11	29
12	а) $\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$ б) $3\pi; 4\pi; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$
13	6
14	$(0,5; 1] \cup [10; +\infty)$
15	12,5%
16	2
17	$(0; 1)$
18	а) да б) нет в) 2004

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

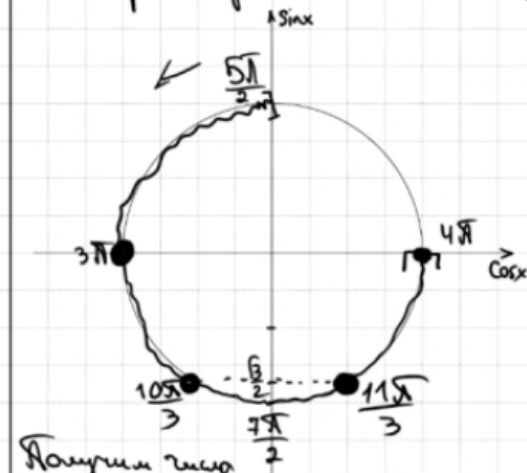
12 а) Решите уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

а) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$
 $\sin x \cdot (2\sin x + \sqrt{3}) = 0$
 $\sin x = 0$
 $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
 $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) Отберём корни с помощью окр-ти.



Получим число
 $x = 3\pi$
 $x = 4\pi$
 $x = \frac{10\pi}{3}$
 $x = \frac{11\pi}{3}$

ОТВЕТ: а) $\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $3\pi, 4\pi, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$

Источники:

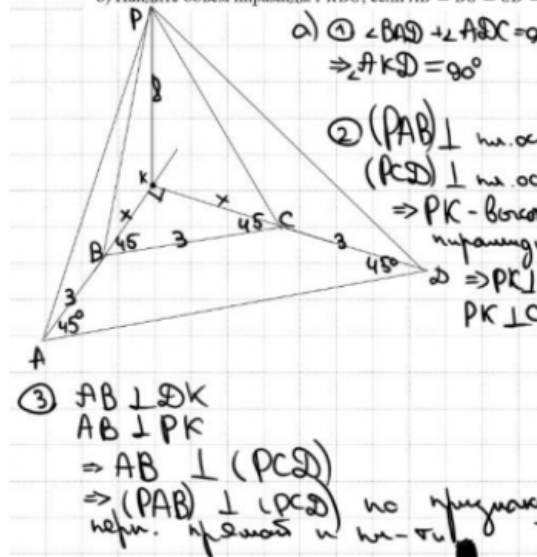
Основная волна 2020
 Янв-фев 2018
 Янв-фев 2018
 СтатГрад 06.02.2019

13

Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.



а) ① $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle KAD = 90^\circ$
 ② $(PAB) \perp$ на осн
 $(PCD) \perp$ на осн
 $\Rightarrow PK$ – высота пирамиды
 $\Rightarrow PK \perp AB$
 $PK \perp CD$
 ③ $AB \perp DK$
 $AB \perp PK$
 $\Rightarrow AB \perp (PCD)$
 $\Rightarrow (PAB) \perp (PCD)$ по признаку перп. плоскостей и на-ти

б) ① Пусть $BK = x = CK$
 т.к. $\triangle BKC$ – равноб.
 $\angle KBC = 45^\circ = \angle KCB$

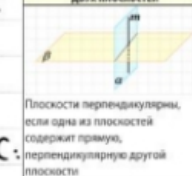
② Рассмотрим $\triangle BKC$:
 по т. Пиф.
 $3^2 = x^2 + x^2$
 $x^2 = \frac{9}{2}$
 $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 8 = 6$$

ОТВЕТ: 6

Источники:

ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Горизонт #14 2019
 Основная волна 2017
 ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ
 ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



- 14** Решите неравенство
 $\log_2(4x^2 - 1) - \log_2 x \leq \log_2(5x + \frac{9}{x} - 11)$.

Источники:

ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Основная волна 2018
 Янтарко 2019 (36 вар)

① $4x^2 - 1 > 0$
 ② $x > 0$
 ③ $5x + \frac{9}{x} - 11 > 0$
 ④ $\frac{4x^2 - 1}{x} \leq 5x + \frac{9}{x} - 11$

① $4x^2 - 1 > 0$
 $(2x - 1)(2x + 1) > 0$

③ $5x^2 - 11x + 9 > 0$

ОТВЕТ: $(\frac{1}{2}; 1] \cup [10; +\infty)$

④ $\frac{4x^2 - 1 - 5x^2 + 11x - 9}{x} \leq 0$
 $\frac{-x^2 + 11x - 10}{x} \leq 0 \quad | \cdot (-1)$
 $\frac{x^2 - 11x + 10}{x} \geq 0$

Найдём пересечение:

- 15** Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой
 $Q = 15\,000 - P$, $1000 \leq P \leq 15\,000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $30\,000 + 5\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Источники:

Основная волна (Резерв) 2018
 Основная волна (Резерв) 2015

① Цена равна Прибыль
 $PQ - (30\,000 + 5\,000\,000) =$
 $= P \cdot (15\,000 - P) - 30\,000 - 5\,000\,000$
 $= -P^2 + 15\,000P - 5\,030\,000$

③ Прибыль (р) = Прибыль (0,8р)
 $-P^2 + 15\,000P - 5\,030\,000 = -0,64P^2 + 18\,000 \cdot 0,8P - 5\,030\,000$
 $0,36P^2 - 3600P = 0$
 $P(0,36P - 3600) = 0$
 $P = 0$ или $P = 10\,000$ — Первоначальная
 $0,8P = 8000$ — сниженная цена

② Найдём, при какой цене Р будет макс. прибыль
 $P_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{15\,000}{-2} = 7500$

④ $8000P - 100\% \rightarrow$ на 12,5%
 $9000P - 112,5\%$
 $? = \frac{9000 \cdot 100}{8000} = 112,5$

ОТВЕТ: 12,5%

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

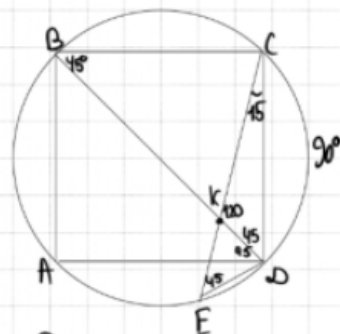


16 Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает диагональ BD в точке K .

- а) Докажите, что произведение $CK \cdot CE$ равно площади квадрата.
б) Найдите отношение $CK : KE$, если $\angle ECD = 15^\circ$.

Источники:

Ященко 2018
Основная волна 2016



$$CK \cdot CE = CO^2$$

б) ① по $\sin \triangle CDK$:

$$\frac{CD}{\sin 120^\circ} = \frac{CK}{\sin 45^\circ}$$

$$CK = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot CD \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} CD$$

② по $\sin \triangle CDE$:

$$\frac{CE}{\sin 120^\circ} = \frac{CD}{\sin 15^\circ}$$

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot CD \cdot \frac{2}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ} CD$$

$$KE = \frac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ} CD - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} CD = \frac{1}{\sin 15^\circ} CD$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} CD}{\frac{1}{\sin 15^\circ} CD} = 2$$

а) ① Рассмотрим $\triangle CDK \sim \triangle CDE$
 $\angle DCE$ - общий
 $\angle CDK = 45^\circ = \angle CED = 45^\circ$
 (т.к. опир. на $\angle COD = 90^\circ$)
 $\Rightarrow \triangle CDK \sim \triangle CDE$
 $\frac{CK}{CD} = \frac{CD}{CE}$

ОТВЕТ: 2

17 Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

Источники:

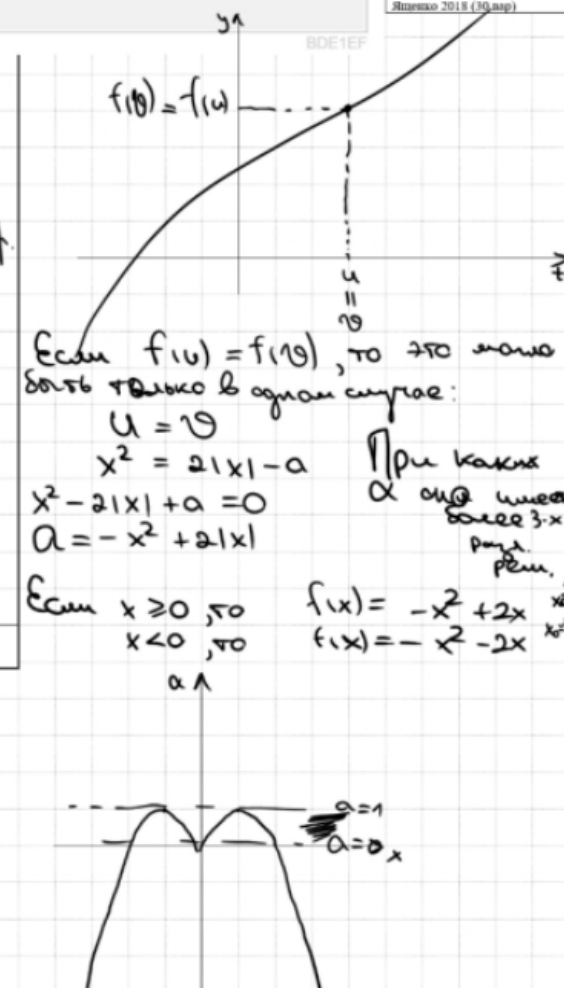
ФИПИ (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2012
Ященко 2018 (30. апр)

$$x^{10} + x^2 = (2|x| - a)^5 + (2|x| - a)$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^5 + t$
 $f'(t) = 5t^4 + 1$
 $\Rightarrow f(t)$ возрастает на всей области оп.

Пусть $u = x^2$
 $19 = 2|x| - a$
 Получаем $u^5 + u = 19^5 + 19$
 $f(u) = f(19)$

ОТВЕТ: $(0; 1)$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел, последние цифры которых не равны нулю, поделили на его последнюю цифру. Сумма полученных чисел равна S .

Источники:

FIRI (старый банк)
Достоинство, 2022

- а) Может ли S быть равной $16\frac{5}{6}$?
 б) Может ли S быть равной $369\frac{29}{126}$?
 в) Найдите наибольшее целое значение S , если каждое из исходных чисел было трёхзначным.

a) Если S — число го g в K , то $S = 0$ $\left| \begin{array}{c} 126 \\ 63 \end{array} \right| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}$ $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

Если 11 12 13 14
↓ ↓ ↓
11 6 ... Порог

Средн. 7 7
большинство последние цифры
8 8 8 8

$$E_{\text{sum}} = \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 4\frac{1}{3} & 3\frac{1}{2} & 3 \end{matrix} = 16\frac{5}{6}$$

	a) Да, год 12 13 14 15
ОТВЕТ:	б) нет
	в) 2004

В) Для максимизации полезности
 человек 1 2 3 4
 $10x \cdot \frac{275}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = 365 \frac{29}{126}$

$$\frac{10x+1}{1} + \frac{10x+2}{2} + \frac{10x+3}{3} + \frac{10x+4}{4} \quad y = \frac{(365 \cdot 26 + 29) \cdot 504}{12}$$

$$S = 10x + 1 + 5x + 1 + 3x + \frac{1}{3}x + 1 + 2x + \frac{1}{2}x$$

$S = 20x + \frac{5}{6}x + 4$

Наибольшее двузначное x , кратное 6, т.е. 96

$$\frac{961}{1} + \frac{962}{2} + \frac{963}{3} + \frac{964}{4} = 2004$$

Если последние цифры не 1234, то количество слагаемых < 500

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта a ; – обоснованное решение пункта b ; – искомая оценка в пункте c ; – пример в пункте c , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.



3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.