

**Единый государственный экзамен  
по МАТЕМАТИКЕ  
Профильный уровень**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

|    |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 10 | - | 0 | , | 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

***Желаем успеха!***

**Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

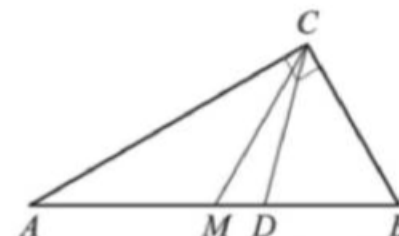
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

*Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

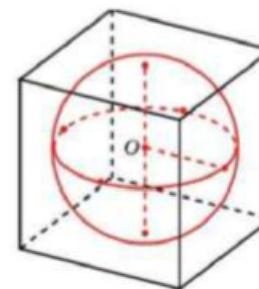
**Часть 1**

- 1** Острый угол  $B$  прямоугольного треугольника равен  $66^\circ$ . Найдите угол между биссектрисой  $CD$  и медианой  $CM$ , проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2** Шар, объем которого равен  $35\pi$ , вписан в куб. Найдите объем куба.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 В городе 46% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 7,7% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 Найдите корень уравнения

$$(x + 3)^9 = 512.$$

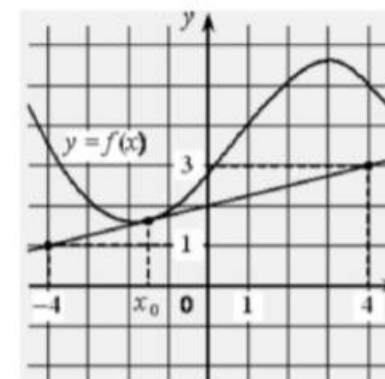
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 6 Найдите значение выражения

$$\frac{16 \sin 98^\circ \cdot \cos 98^\circ}{\sin 196^\circ}.$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

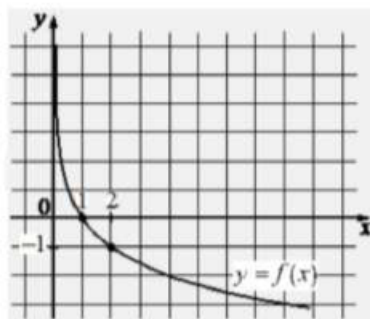
- 8 Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость  $v$  (в м/с) меняется по закону  $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$ , где  $t$  – время с момента начала наблюдения в секундах,  $T = 2$  с – период колебаний,  $v_0 = 1,5$  м/с. Кинетическая энергия  $E$  (в Дж) груза вычисляется по формуле  $E = \frac{mv^2}{2}$ , где  $m$  – масса груза (в кг),  $v$  – скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 20 секунд после начала наблюдения. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 9 Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 1,5 км от дома. Один идёт со скоростью 2,2 км/ч, а другой — со скоростью 4,4 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = \log_a x$ . Найдите значение  $f(16)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 441}{x} \text{ на отрезке } [2; 32].$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$4 \cdot 16^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 12^x + 2 \cdot 9^{x+\frac{1}{2}} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2; 3]$ .

- 13 На рёбрах  $CD$  и  $BB_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 12 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причём  $DP = 4$ , а  $B_1 Q = 3$ . Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- а) Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .  
б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $APQ$ .

- 14 Решите неравенство

$$\log_2^2(16 + 6x - x^2) + 10 \log_{0,5}(16 + 6x - x^2) + 24 > 0.$$

- 15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на  $x$  млн рублей, где  $x$  — целое число. Найдите наименьшее значение  $x$ , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

**16** В окружность вписана трапеция  $ABCD$ ,  $AD$  — большее основание, проведена высота  $BH$ , вторично пересекающая окружность в точке  $K$ .

- а) Докажите, что  $AC$  перпендикулярна  $AK$ .  
б) Найдите  $AD$ , если радиус описанной окружности равен 12,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $CK$  пересекает основание  $AD$  в точке  $N$ . Площадь четырёхугольника  $BHNC$  в 8 раз больше, чем площадь треугольника  $KHN$ .

**17** Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  единственный корень.

**18** В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

- а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?  
б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?  
в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*

### Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

| Номер задания | Правильный ответ                                                                |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1             | 21                                                                              |
| 2             | 210                                                                             |
| 3             | 0,08                                                                            |
| 4             | 0,05                                                                            |
| 5             | -1                                                                              |
| 6             | 8                                                                               |
| 7             | 0,25                                                                            |
| 8             | 0,18                                                                            |
| 9             | 1                                                                               |
| 10            | -4                                                                              |
| 11            | 42                                                                              |
| 12            | а) $\log_{\frac{4}{3}} 2$ ; $\log_{\frac{4}{3}} 3$<br>б) $\log_{\frac{4}{3}} 2$ |
| 13            | $\frac{12\sqrt{26}}{13}$                                                        |
| 14            | $(-2; 0) \cup (6; 8)$                                                           |
| 15            | 8                                                                               |
| 16            | $4\sqrt{33}$                                                                    |
| 17            | $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$                                  |
| 18            | а) да<br>б) нет<br>в) 25                                                        |

### Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12 а) Решите уравнение

$$4 \cdot 16^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 12^x + 2 \cdot 9^{x+\frac{1}{2}} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2; 3]$ .

Источники:

Докладная работа (Регистр) 2022  
Ященко 2019 (10 вар)  
Ященко 2018 (30 вар)  
Ященко 2018  
Основная работа 2014

а)  $4 \cdot \frac{16^x}{16^{\frac{1}{2}}} - 5 \cdot 12^x + 2 \cdot 9^x \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 0$   $x = \log_{\frac{4}{3}} 2$   $x = \log_{\frac{4}{3}} 3$

$16^x - 5 \cdot 12^x + 6 \cdot 9^x = 0$   $\cdot 9^x$

$\left(\frac{16}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{12}{9}\right)^x + 6 = 0$

$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + 6 = 0$

Пусть  $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$t = 2$   $t = 3$

$\left(\frac{4}{3}\right)^x = 2$   $\left(\frac{4}{3}\right)^x = 3$

б)  $\log_{\frac{4}{3}} 2$   $\log_{\frac{4}{3}} 3$

ОТВЕТ: а)  $\log_{\frac{4}{3}} 2$ ;  $\log_{\frac{4}{3}} 3$   
б)  $\log_{\frac{4}{3}} 2$

13

На ребрах  $CD$  и  $BB_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 12 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причём  $DP = 4$ , а  $B_1 Q = 3$ . Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- а) Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .  
б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $APQ$ .

Источники:

Серегин 2018  
Основная работа (Регистр) 2016  
Расстояние от точки до плоскости  
Решение задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости  
Решение задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости  
Решение задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости

а) 1) Рассмотрим треугольник  $CMR$   
 $V_{CMRP} = \frac{1}{3} \cdot S_{PMR} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{CPR} \cdot CM$

2) Из  $\triangle PMR$  по  $\cos$ :  $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$   
 $\cos = \frac{612 + 640 - 100}{2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 6 \sqrt{17}} = \frac{1152}{288 \sqrt{170}}$   
 $\sin = \frac{126}{\sqrt{170}}$   
 $S_{PMR} = \frac{1}{2} \cdot 8 \sqrt{10} \cdot 6 \sqrt{17} \cdot \frac{126}{\sqrt{170}} = 24 \sqrt{26}$

3)  $24 \sqrt{26} \cdot h = \frac{8 \cdot 24}{2} \cdot 6 \cdot 3$   
 $h = \frac{24}{\sqrt{26}} = \frac{24 \sqrt{26}}{26} = \frac{12 \sqrt{26}}{13}$

б) 1)  $\triangle ADP \sim \triangle CPR$  по 2 углам  
 $\frac{12}{CR} = \frac{4}{8}$   $CR = 24$

2)  $\triangle QBR \sim \triangle CMR$  по 2 углам  
 $\frac{9}{CM} = \frac{36}{24}$   $CM = 6$   
 $\Rightarrow M$  - середина  $CC_1$

ОТВЕТ:  $\frac{12 \sqrt{26}}{13}$

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                             | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах                                                                                                                                                              | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                             | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                               | 2     |

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                                                                        | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б                                                                                                                                                                          | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                 | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                          | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                          | 3     |

**14** Решите неравенство  $\log_2^2(16+6x-x^2) + 10\log_{0,5}(16+6x-x^2) + 24 > 0$ .

**Источники:**  
ГПР (старый банк)  
Досрочная волна 2015

**Решение:**

Пусть  $\log_2(16+6x-x^2) = t$

$t^2 - 10t + 24 > 0$

$(t-4)(t-6) > 0$

$t < 4$   
 $t > 6$

$\log_2(16+6x-x^2) < \log_2 16$   $\log_2(16+6x-x^2) > \log_2 64$

$0 < 16+6x-x^2 < 16$   $16+6x-x^2 > 64$

$16+6x-x^2 > 0$   $x^2-6x+48 < 0$

$16+6x-x^2 < 16$   $(x^2-6x+9)+39 < 0$

$(x-3)^2+39 < 0$   
нет реш.

**Ответ:**  $(-2; 0) \cup (6; 8)$

**15** Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на  $x$  млн рублей, где  $x$  — целое число. Найдите наименьшее значение  $x$ , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

**Источники:**  
Янтарно 2018 (36 лет)  
Основная волна (Регура) 2020  
Досрочная волна 2016  
Основная волна (Регура) 2016

**Решение:**

Пусть  $Q_{21}$  — месяц отч.  
Дек — месяц вклада

$2,31 \cdot x - 2x > 17 - 14,64$   
 $0,31 \cdot x > 2,359$

$x > \frac{2,359 \cdot 100}{0,31}$

$x > \frac{2359}{310}$

$x > 7 \frac{189}{310}$

$x_{\text{наим}} = 8$

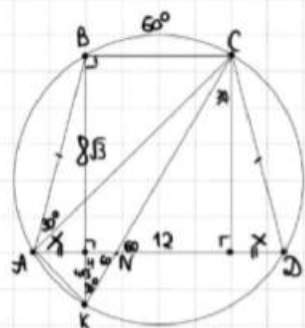
**Ответ:** 8

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                        | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                                           | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                        | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                          | 2     |

| Содержание критерия                                                 | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| Максимальный балл                                                   | 2     |

**16** В окружность вписана трапеция  $ABCD$ ,  $AD$  — большее основание, проведена высота  $BH$ , вторично пересекающая окружность в точке  $K$ .

- а) Докажите, что  $AC$  перпендикулярна  $AK$ .  
б) Найдите  $AD$ , если радиус описанной окружности равен 12,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $CK$  пересекает основание  $AD$  в точке  $N$ . Площадь четырёхугольника  $BHNC$  в 8 раз больше, чем площадь треугольника  $KHN$ .



а) ①  $ABCD$  — трапеция (т.к. вписана в окр.)

②  $\angle CBK = 90^\circ$

$\angle CKA = 180^\circ$

$\angle CAK = 90^\circ$

(по т. о впис. угол)

$AC \perp AK$  ■

б) ①  $CK$  — диаметр  
 $CK = 24$

②  $\angle BAC = 30^\circ = \angle BKC$

③  $\triangle BKC$ :  $BK = 12\sqrt{3}$ ,  $CK = 24$

④ Пусть  $S_{KHN} = S$ ,  $S_{BCHN} = 8S$ ,  $S_{BKC} = 9S$

Тогда  $\frac{S_{BKC}}{S_{KHN}} = 9 \Rightarrow k = 3$

⑤ по св-ву хорд  $AD \perp BK$  хорд  
 $AK = 4$ ,  $KN = 8$

$X \cdot (12 + X) = 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$

$X^2 + 12X - 96 = 0$

$D = 144 + 384 = 528 = (4\sqrt{33})^2$

$X = \frac{-12 \pm 4\sqrt{33}}{2}$

$X = -6 + 2\sqrt{33}$

$AD = 12 + 2X = 12 - 12 + 4\sqrt{33} = 4\sqrt{33}$

**Источники:**  
Основная волна 2021

**ОТВЕТ:**  $4\sqrt{33}$



| Содержание критерия                                                                                                                                                                        | Баллы |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б                                                                                          | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ                                 | 1     |

обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен  
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Максимальный балл

0

3

**17** Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$  имеет на промежутке  $(\frac{\pi}{2}; \pi]$  единственный корень.

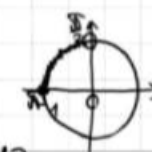
**Источники:**  
ЕГЭ (старый банк)  
Основная волна (Резерв) 2013

$$\begin{cases} \sin^2 x + 2 \cos x + a \geq 0 \\ \sin^2 x + 2 \cos x + a = \sin^2 x + \cos x - a \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

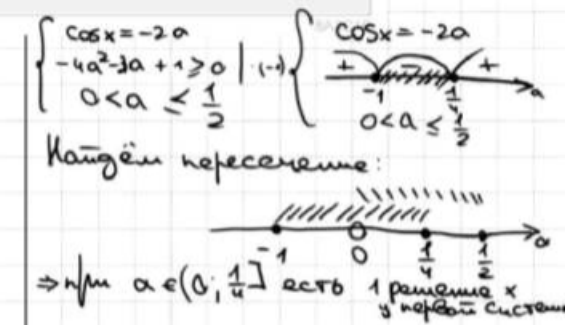
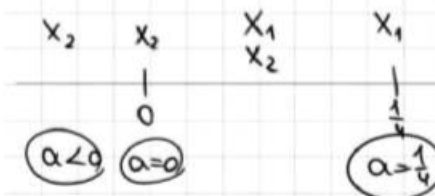
$$\begin{cases} \sin^2 x + 2 \cos x + a < 0 \\ -\sin^2 x - 2 \cos x - a = \sin^2 x + \cos x - a \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -2a \\ 1 - \cos^2 x + 2 \cos x + a \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -2a \\ -4a^2 - 4a + a + 1 \geq 0 \\ -1 \leq -2a < 0 \end{cases}$$

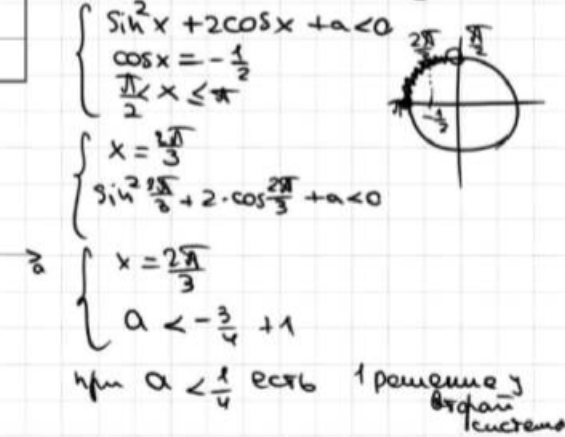


**ОТВЕТ:**  $(-\infty; 0] \cup \{\frac{1}{4}\}$   
Пусть  $x_1$  — корень первой системы  
 $x_2$  — корень второй системы



$$\begin{cases} \sin^2 x + 2 \cos x + a < 0 \\ 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Решим уравнение:  $2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0$   
 $\cos x = 2$  (не подходит)  
 $\cos x = -\frac{1}{2}$



| Содержание критерия                                                                                            | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                               | 4     |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек | 3     |

|                                                                                            |   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$ | 2 |
| Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$                | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                        | 0 |
| Максимальный балл                                                                          | 4 |

**18** В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

**Источники:**  
Олимпиада юниоров 2007

а)  $29, 32, 40, 91$

$29 + 32 + 40 + 91 = 192$  (1)

Переливаем: 19 л из 4-ой в 1-ую, 16 л из 4-ой в 2-ую, 8 л из 4-ой в 3-ью

б)  $1, 1, 1, 1, 1, 1, 8$

Для приведения к общему знаменателю нужно как минимум 6 переливаний, т.к. до 2 л не хватает 6 бочкам

в)

ОТВЕТ: а) Да  
б) Нет  
в)

а) 1) Меньше, чем за 25 переливаний точно не получится

2) Докажем, что 25 переливаний точно хватит

Пусть 26х - общее количество воды в 26 бочках  
х - сколько воды нужно излить в каждую бочку

Если в 26 бочках сразу по х воды, то переливаний не нужно  
Если в 25 бочках сразу по х воды, то в 26-й бочке тоже х воды и переливаний не нужно  
Если в 24 бочках сразу по х воды, то в оставшихся двух бочках по 2х, то нужно 1 переливание  
Если в 23 бочках сразу по х воды, то в оставшихся трех бочках по 3х, то нужно 2 переливания  
...

Если в 19 бочках сразу по х воды, то в оставшихся семи бочках по 7х, то нужно 6 переливаний

...

Если в 0 бочках сразу по х воды, то в оставшихся 26 бочках по 26х, то нужно 25 переливаний

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                                | Баллы |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты                                                                                                                                                               | 4     |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов                                                                                                                                                           | 3     |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов                                                                                                                                                           | 2     |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>– обоснованное решение пункта $a$ ;<br>– обоснованное решение пункта $b$ ;<br>– искомая оценка в пункте $в$ ;<br>– пример в пункте $в$ , обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                                | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                                                           | 4     |

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособраннадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.