

3 В группе туристов 300 человек. Их вертолѐтом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 15 человек за рейс. Порядок, в котором вертолѐт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В. полетит первым рейсом вертолѐта.

Ответ: _____.

4 Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: _____.

5 Решите уравнение

$$\sqrt{40 + 3x} = x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

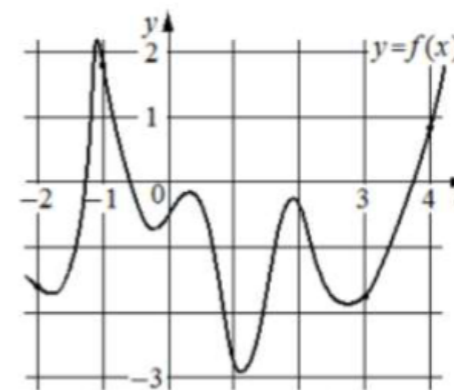
Ответ: _____.

6 Найдите значение выражения

$$3\sqrt{2}\cos^2 \frac{9\pi}{8} - 3\sqrt{2}\sin^2 \frac{9\pi}{8}.$$

Ответ: _____.

7 На рисунке изображѐн график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____.

8 На рисунке изображена схема моста. Вертикальные *пилоны* связаны провисающей *цепью*. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают *полотно* моста, называются *вантами*.

Введѐм систему координат:

ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаѐтся формулой

$$y = 0,0043x^2 - 0,74x + 35,$$

где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

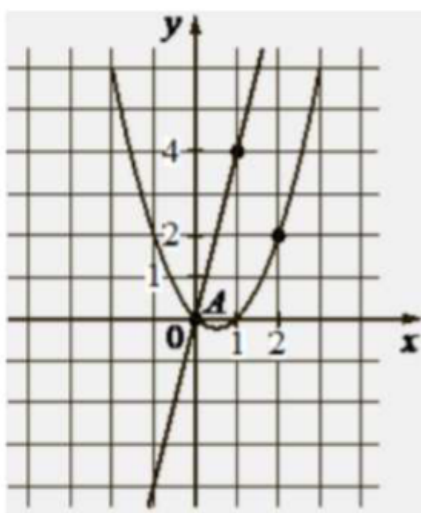
Ответ: _____.



9 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 775 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 28 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 61 час. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

10 На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Ответ: _____.

11 Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 10)^2x + 2$ на отрезке $[-11; -4]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos x + 1} = 1 - \cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

13 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC . Точка K – середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC = 1:3$.

- а) Докажите, что $KM \perp AC$.
- б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

14 Решите неравенство

$$\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}} \left(\frac{x^2 + 5x + 8}{x^2 - 3x + 2} \right) \leq 0.$$

15 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

16 В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона HF лежит на отрезке BC , а вершина E – на отрезке AB .

- а) Докажите, что $FH = 2DH$.
б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

18 Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

- а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.
б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?
в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	2
2	50
3	0,05
4	0,07
5	8
6	3
7	-1
8	4,27
9	3
10	5
11	2
12	а) $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in Z$ б) $-2\pi; -\frac{3\pi}{2}$
13	$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{530}}{53}\right)$
14	$\left[-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (2; +\infty)$
15	500
16	$24 - 12\sqrt{3}$
17	$\left[-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (-1; 1]$
18	а) 339 б) нет в) $\frac{931}{27}$

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12 а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos x + 1} = 1 - \cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

а)
$$\frac{\sin x}{\cos x + 1} - \frac{\cos x + 1}{1} + \frac{\cos x + 1}{1} = 0$$

$$\frac{\sin x - \cos x - 1 + \cos^2 x + \cos x}{\cos x + 1} = 0$$

$$\frac{1 - \sin^2 x + \sin x - 1}{\cos x + 1} = 0$$

$$\frac{\sin x \cdot (1 - \sin x)}{\cos x + 1} = 0$$

б)
$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x \neq \pi + 2\pi n \end{cases}$$

ОТВЕТ: а) $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$

Источники:
 Дискретная математика 2019

Решаем $x = 2\pi n$
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

б) Отберём корни с помощью окр.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

13

В основании прямой треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC . Точка K — середина ребра $A_1 B_1$, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.
 б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 6, AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

а) Пусть E — проекция точки K на плоскость ABC . E — середина AB . Пусть EM — средняя линия $\triangle A_1 B_1 C_1$.
 $EM \parallel B_1 C_1$
 $EM \perp AC$ (так как $B_1 C_1 \perp AC$)
 $KM \perp AC$ (по теореме о проекции)

б) Пусть OM — перпендикуляр из O на AB .
 $\angle KOM$ — искомый.
 $OM \perp (ABB_1)$, т.к. $OM \perp AB$ и $OM \perp AA_1$.
 $\Rightarrow \angle KOM = 90^\circ$

3) Рассмотрим $\triangle ABC$.
 $OM = \frac{AB}{2} = 3$
 $EO = \sqrt{5 - \frac{4}{9} \cdot 5} = \frac{5}{3}$

4) $\tan \alpha = \frac{EO}{OM} = \frac{5/3}{3} = \frac{5}{9}$
 $\alpha = \arctan \frac{5}{9}$

ОТВЕТ: $\arctan \frac{5}{9}$

Источники:

- ЕГЭ (старый базис)
- Январи 2022 (50 вер)
- Январи 2021 (10 вер)
- Январи 2020 (10 вер)
- Январи 2020 (50 вер)
- Январи 2019 (36 вер)
- Январи 2019 (14 вер)
- Специальный 05.2020
- Специальный 05.2017
- Специальный 22.09.2016
- ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛАХ
- Угол между прямой и плоскостью

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

14 Решите неравенство $\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}} \left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} \right) \leq \log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}} 1$

Источники:

Основная школа 2018	
МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
выше	стара
$\ln a^f - \ln a^g$	$(a - 1)(f - g)$
$a^f - a^g$	$(a - 1)(f - g)$
$ f - g $	$ f - g $
$\sqrt{f - g}$	$ f - g $

① $\left(1 - \frac{1}{(x-1)^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} - \frac{1}{1}\right) \leq 0$

② $1 - \frac{1}{(x-1)^2} > 0$

③ $\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} > 0$

④ $\frac{-1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2+5x+8-x^2+3x-2}{x^2-3x+2} \leq 0$

$\frac{+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{8x+6}{x^2-3x+2} \geq 0$

Найдем пересечение:

ОТВЕТ: $\left[-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (2; +\infty)$

15 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

Источники:

ЕГЭ (старый формат)
ЕГЭ (новый формат)
Январь 2018
Июнь 2017
Диспуты юля 2015

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

① $(x^2+y^2) \cdot 500 = 5000000$
 $x^2+y^2 = 10000$
 Выразим y :
 $y^2 = 10000 - x^2$
 $y = \sqrt{10000 - x^2}$
 где $\begin{cases} x \geq 0 \\ 10000 - x^2 \geq 0 \\ x \leq 100 \\ 0 \leq x \leq 100 \end{cases}$

② $(3x + 4y)_{\max} = 3x + 4\sqrt{10000 - x^2}$

$f(x) = 3x + 4\sqrt{10000 - x^2}$
 $f'(x) = 3 + 4 \cdot \frac{1 \cdot (-2x)}{2\sqrt{10000 - x^2}} = 0$

$3 = \frac{4x}{\sqrt{10000 - x^2}}$
 $3\sqrt{10000 - x^2} = 4x$
 $\sqrt{10000 - x^2} = \frac{4}{3}x$
 $10000 - x^2 = \frac{16}{9}x^2$
 $\frac{25}{9}x^2 = 10000$
 $x^2 = \frac{10000 \cdot 9}{25} = 400 \cdot 9$
 $x = 20 \cdot 3 = 60$

$y(60)_{\max} = 3 \cdot 60 + 4 \cdot \sqrt{10000 - 3600} = 180 + 320 = 500$

ОТВЕТ: 500

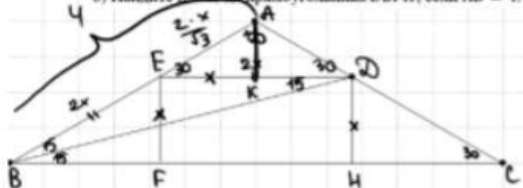
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16 В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольнике ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона HF лежит на отрезке BC , а вершина E — на отрезке AB .

Источники:
Горюхи 916 2019
Дорожкин вост (Решур) 2014

- а) Докажите, что $FH = 2DH$.
б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.



а) ① $\triangle ABD$: $\angle BDA = 180 - 15 - 120 = 45$
 $\angle BDE = 45 - 30 = 15$
 $\triangle BDE$ — равнобедренный
 Пусть $EF = x$
 Тогда $BE = 2x$ (т.к. EF лежит на высоте угла 30°)
 $DE = BE = 2x$
 $ED = 2EF$
 $\Rightarrow FH = 2DH$

② $\triangle ABE$:
 $\cos 30^\circ = \frac{x}{EA}$
 $AE = \frac{x \cdot 2}{\sqrt{3}}$
 $AB = 2x + \frac{2x}{\sqrt{3}} = 4 \quad | \cdot \sqrt{3}$
 $2\sqrt{3}x + 2x = 4\sqrt{3} \quad | :2$
 $\sqrt{3}x + x = 2\sqrt{3}$
 $x \cdot (1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$
 $x = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{6-2\sqrt{3}}{2} = 3-\sqrt{3}$
 ③ $S_{DEFH} = x \cdot 2x = 2x^2 = 2 \cdot (3-\sqrt{3})^2 = 2 \cdot (9 - 6\sqrt{3} + 3) = 24 - 12\sqrt{3}$

ОТВЕТ: $24 - 12\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\log_{1-x}(a-x+2) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1]$.

Источники:
ЕГЭ (старый формат)
Дорожкин вост 2014

$$\begin{cases} (1-x)^2 = a-x+2 \\ 1-x > 0 \\ 1-x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-2x+x^2 = a-x+2 \\ 1-x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x^2 - x - 1 \\ x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} x_1 = \frac{1}{2} \\ a_1 = -1,25 \end{matrix} \right)$$

ОТВЕТ: $[-1,25; -1) \cup (-1, 1]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18 Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведение его цифр.

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{111}{27} = \frac{226}{54} = \frac{339}{81} = \frac{452}{108} = \dots$

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

Источники:
Олимпиада восток, 2016

а) 339, т.к. $\frac{339}{81} = \frac{113}{27}$

б) Искаемое число это $\frac{125}{27}$

$\frac{125}{10} \neq$
 $\frac{375}{105} \neq$
 $\frac{625}{60} \neq$
 $\frac{875}{280} \neq$

Нет, т.к. ни одна из потенциальных числителей не делится на 27.
Ответ: б) нет

в) $\frac{100a + 10b + c}{a \cdot b \cdot c} = \frac{p}{27}$, где p - это число, произведение цифр которого д.б. 27

1 · 3 · 9
1 · 9 · 3
3 · 1 · 9
3 · 3 · 3
3 · 9 · 1
9 · 1 · 3
9 · 3 · 1

Рассмотрев все варианты для p, найдем, что $\frac{931}{27}$ - наиб. несократимая дробь.

ОТВЕТ:
а) 339
б) нет
в) $\frac{931}{27}$

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4