Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

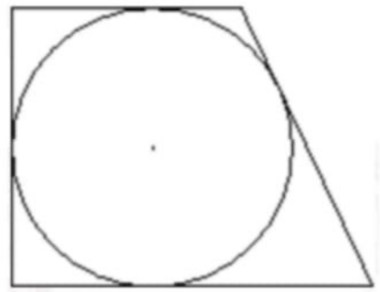
Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

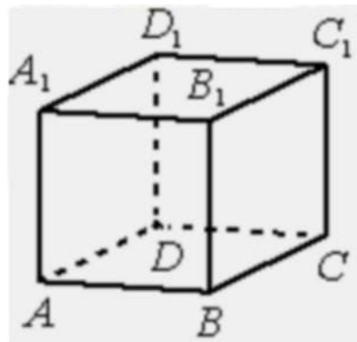
Часть 1

1 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 40, её большая боковая сторона равна 11. Найдите радиус окружности.



Ответ: ___________________________.

2 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми CD_1 и AD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ___________________________.

3 В классе 16 учащихся, среди них два друга – Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

Ответ: ___________________________.

4 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,45. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

$$3^{2x-16} = \frac{1}{81}.$$

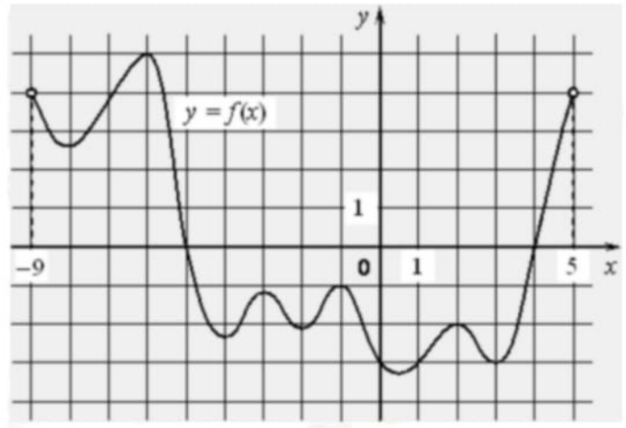
Ответ: ___________________________.

6 Найдите значение выражения

$$\frac{7\sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos 13^\circ}.$$

Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ___________________________.

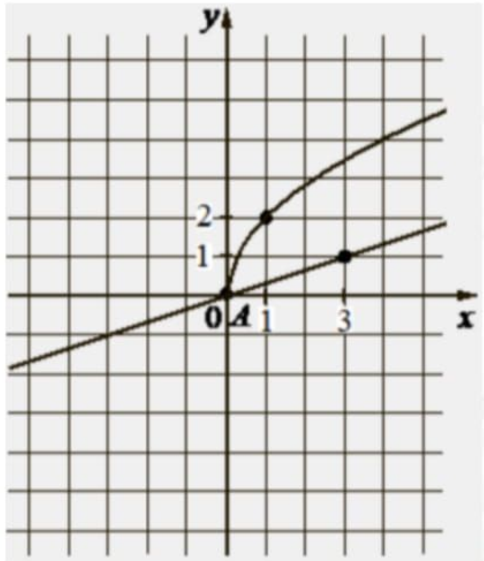
8 Наблюдатель находится на высоте h (в км). Расстояние l (в км) от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км – радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 96 км? Ответ дайте в км.

Ответ: ___________________________.

9 Имеется два сосуда. Первый содержит 60 кг, а второй – 20 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 30% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 45% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: ___________________________.

10 На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: ____________________________.

11 Найдите точку минимума функции

$y = 9x - 9 \cdot \ln(x + 3) + 4$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

14 Решите неравенство

$$2\log_2(1 - 2x) - \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) \le \log_2(4x^2 + 6x - 1).$$

15 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S − натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

16 Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что $AN = CK$.
б) Найдите KN, если $\angle BAC = 35°$, $\angle ACB = 65°$, а радиус окружности равен 12.

17 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$$

имеет единственное решение.

18 В ящике лежит 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 73 грамма. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 115 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?
б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?
в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	4,5
2	90
3	0,2
4	0,27
5	6
6	14
7	9
8	0,72
9	15
10	36
11	-2
12	а) $\frac{\pi}{3}+\pi n;\ n \in Z$ б) $\frac{10\pi}{3};\ \frac{13\pi}{3}$
13	$\arccos\left(\frac{37}{45}\right)$
14	$\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$
15	200
16	12
17	$\{3; 7\}$
18	а) нет б) нет в) 857

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

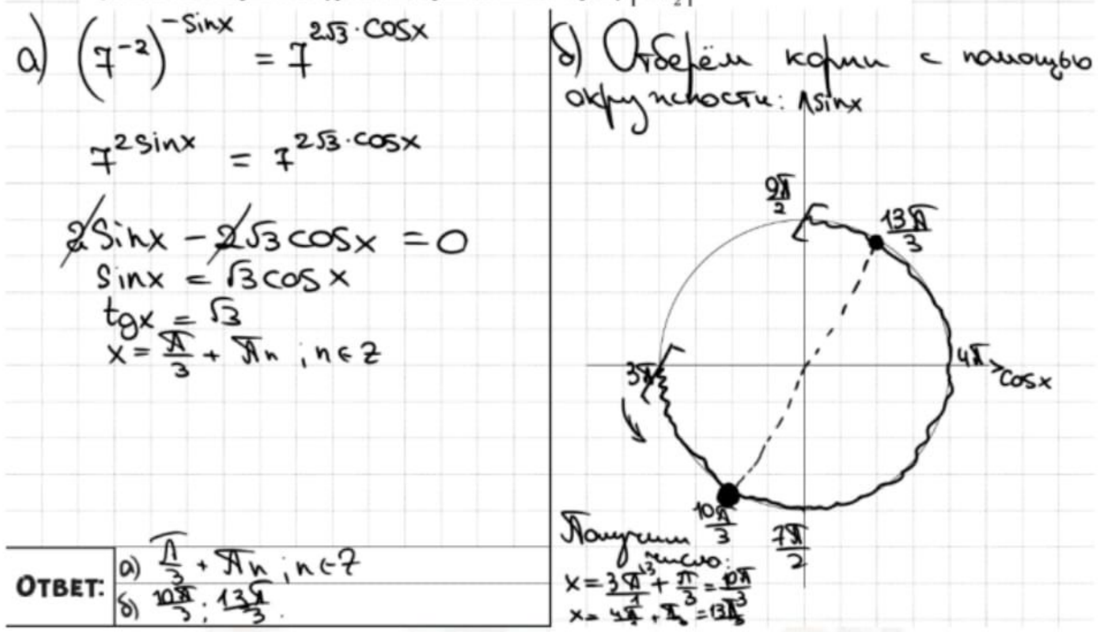
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12 а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017



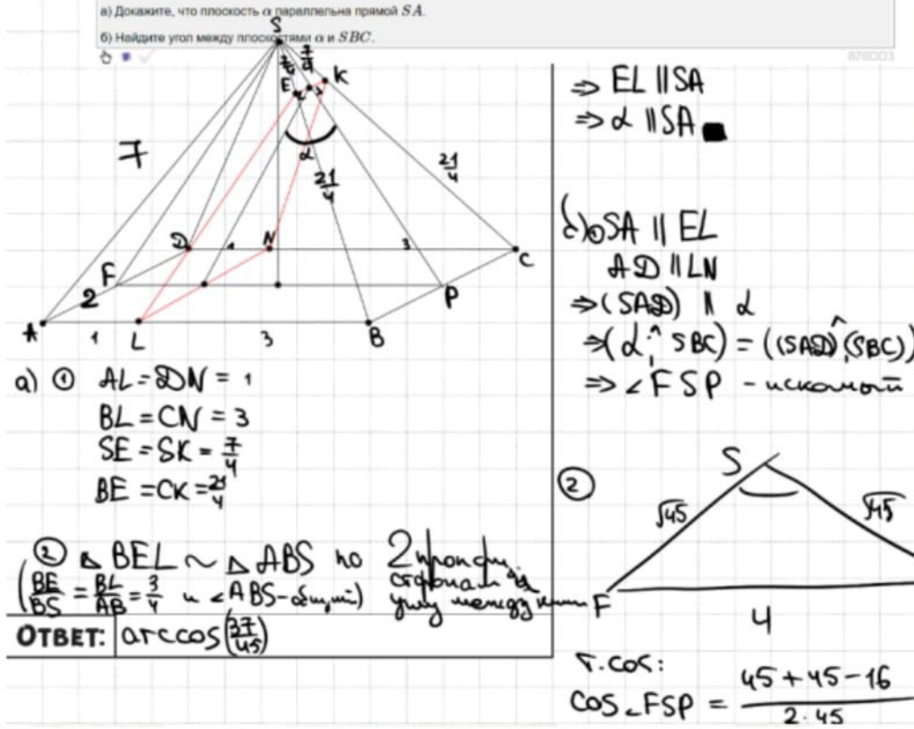
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2019
Досрочная волна 2020

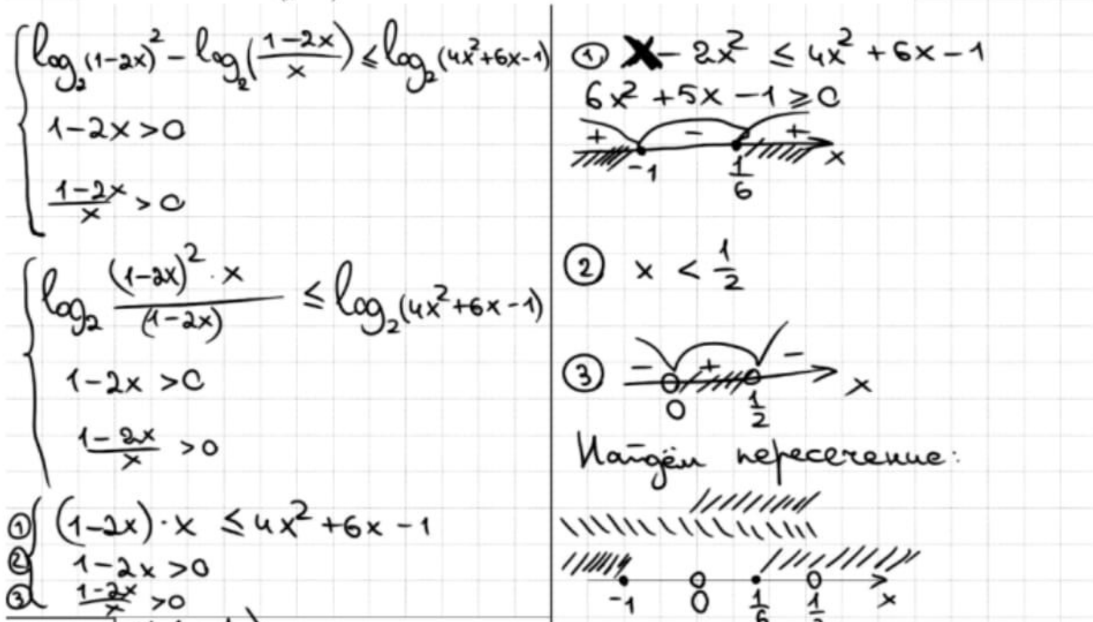


Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство

$2\log_2(1-2x) - \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) \le \log_2(4x^2 + 6x - 1).$

Источники:
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2018



Ответ: $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

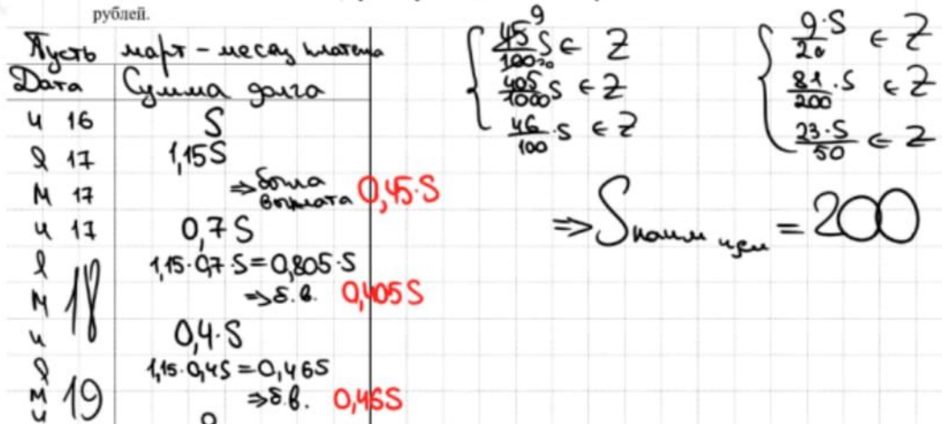
15 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S – натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017
Основная волна (Резерв) 2016



Ответ: 200

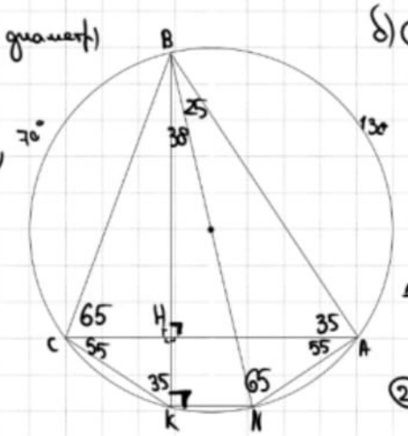
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что $AN = CK$.
б) Найдите KN, если $\angle BAC = 35°$, $\angle ACB = 65°$, а радиус окружности равен 12.

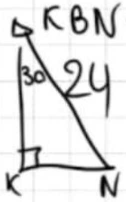
Источники:
Основная волна 2019

а) ① $\angle BKN = 90°$ (опир. на диаметр)
$\angle AHB = 90°$ (т.к. BH – высота)
$\Rightarrow AC \parallel KN$
$\Rightarrow ACKN$ – трапеция, вписанная в окр., т.е. равнобедр.
$\Rightarrow AN = CK$ ■



б) ① Найдём углы:
$\angle BAC = 35° = \angle BKC$ (т.к. опир. на одну дугу)
$\angle KCH = 180 - 90 - 35 = 55$ (по сумме углов)
$\angle CAN = \angle KCH = 55$ (т.к. р/б трап)
$\angle BCA = \angle BNA = 65$ (опираются на одну дугу)
$\angle ABN = 180 - 90 - 65 = 25$
$\triangle ABH$: $\angle ABH = 180 - 90 - 35 = 55$
$\angle KBN = 30°$

② $\triangle KBN$:



$KN = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ (т.к. катет, лежащий напротив $30°$ равен $\frac{1}{2}$ гип-зы)

Ответ: 12

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

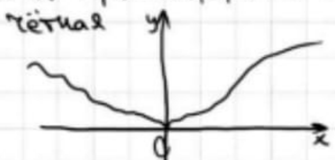
17 Задание с развернутым ответом

Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x+a-5| + |x-a+5|$$
имеет единственное решение.

Источники:
ФИПИ (новый банк)
Ященко 2018
Ященко 2018
Семёнов 2015
Досрочная волна 2014

$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} - |x+a-5| - |x-a+5| = 0$

Пусть $f(x) = \sqrt{x^4 + (a-5)^4} - |x+a-5| - |x-a+5|$
Тогда $f(-x) = \sqrt{(-x)^4 + (a-5)^4} - |-x+a-5| - |-x-a+5|$
$= \sqrt{x^4 + (a-5)^4} - |x-a+5| - |x+a-5|$
$\Rightarrow f(x)$ – чётная



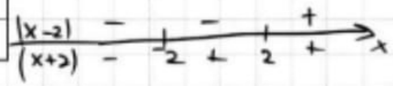
Единственный корень чётная ф-ция может иметь только если этот корень $x=0$

Найдём при каких a $x=0$:

Если $x = 0$, то
$\sqrt{(a-5)^4} = |a-5| + |a-5|$
$(a-5)^2 = 2|a-5|$
$|a-5|^2 - 2|a-5| = 0$
$|a-5| \cdot (|a-5| - 2) = 0$
$|a-5| = 0$ $\quad$ $|a-5| = 2$
$a = 5$ $\quad$ $a-5 = 2$ $\quad$ $a-5 = -2$
$a = 7$ $\quad$ $a = 3$

Проверим, при каких из этих a будет единственный корень $x=0$

Если $a = 3$, то
$\sqrt{x^4+16} = |x-2| + |x+2|$



Ответ: 3; 7

Если $x < -2$, то
$\sqrt{x^4+16} = -x+2-x-2$
$\sqrt{x^4+16} = -2x$
$\begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^4+16 = 4x^2 \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^4 - 4x^2 + 16 = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq 0 \\ (x^2-2)^2 + 12 = 0 \end{cases}$ $\varnothing$

Если $-2 \leq x \leq 2$, то
$\sqrt{x^4+16} = -x+2+x+2$
$\sqrt{x^4+16} = 4$
$x^4 + 16 = 16$
$x = 0$ – единственный корень

Если $x > 2$, то
$\sqrt{x^4+16} = 2x$
$\varnothing$

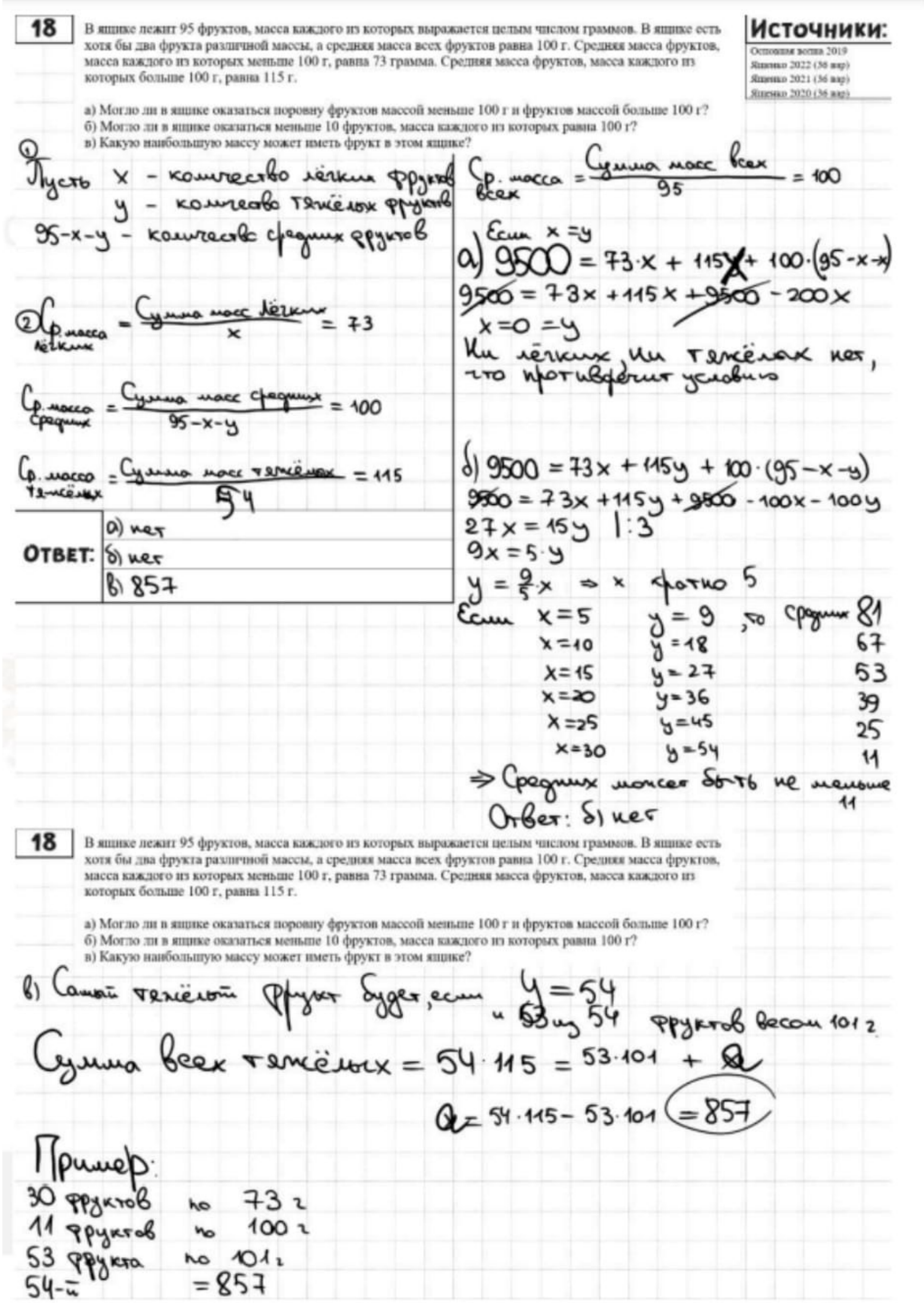
Если $a = 5$
$\sqrt{x^4} = |x| + |x|$
$x^2 = 2|x|$
$|x|^2 - 2|x| = 0$
$|x| \cdot (|x| - 2) = 0$
$|x| = 0$ $\quad$ $|x| = 2$
$x = 0$ $\quad$ $x = \pm 2$
– три корня

Если $a = 7$
$\sqrt{x^4+16} = |x+2| + |x-2|$
$x = 0$ – единств. решение

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220912

С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



18 В ящике лежит 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 73 грамма. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 115 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?
б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?
в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Источники:
Основная волна 2019
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

① Пусть x – количество лёгких фруктов
y – количество тяжёлых фруктов
95-x-y – количество средних фруктов

② $\text{Ср. масса лёгких} = \frac{\text{Сумма масс лёгких}}{x} = 73$

$\text{Ср. масса средних} = \frac{\text{Сумма масс средних}}{95-x-y} = 100$

$\text{Ср. масса тяжёлых} = \frac{\text{Сумма масс тяжёлых}}{54} = 115$

$\text{Ср. масса всех} = \frac{\text{Сумма масс всех}}{95} = 100$

Если $x = y$

а) $9500 = 73\cdot x + 115\cancel{y}x + 100\cdot(95-x-x)$

$\cancel{9500} = 73x + 115x + \cancel{9500} - 200x$

$x = 0 = y$

Ни лёгких, ни тяжёлых нет, что противоречит условию

б) $9500 = 73x + 115y + 100\cdot(95-x-y)$

$\cancel{9500} = 73x + 115y + \cancel{9500} - 100x - 100y$

$27x = 15y \quad |:3$

$9x = 5\cdot y$

$y = \frac{9}{5}x \Rightarrow x$ кратно 5

Если	$x=5$	$y=9$, то средних	81
	$x=10$	$y=18$	67
	$x=15$	$y=27$	53
	$x=20$	$y=36$	39
	$x=25$	$y=45$	25
	$x=30$	$y=54$	11

⇒ Средних может быть не меньше 11

Ответ: б) нет

ОТВЕТ:	а) нет
	б) нет
	в) 857

18 В ящике лежит 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 73 грамма. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 115 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?
б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?
в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

в) Самый тяжёлый фрукт будет, если $y = 54$ и 53 из 54 фруктов весом 101 г

Сумма всех тяжёлых $= 54\cdot 115 = 53\cdot 101 + Q$

$Q = 54\cdot 115 - 53\cdot 101 = 857$

Пример:
30 фруктов по 73 г
11 фруктов по 100 г
53 фрукта по 101 г
54-й $= 857$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220912

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.