

Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант №344

Уровень 1

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

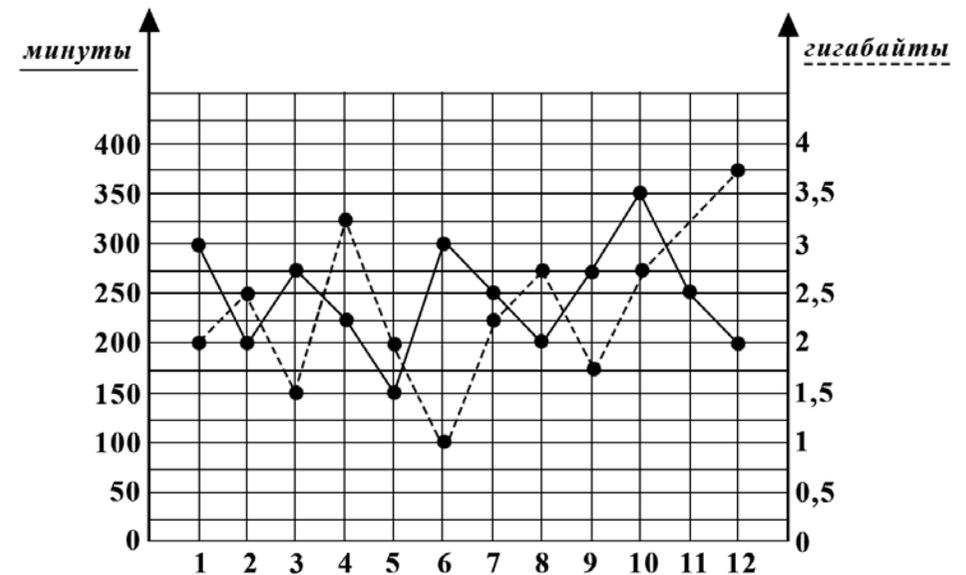
Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

Модуль «Алгебра»

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5



На графике (см. выше) точками изображено количество минут, потраченных на исходящие вызовы, и количество гигабайтов мобильного интернета, израсходованных абонентом в процессе пользования смартфоном, за каждый месяц 2020 года. Для удобства точки, соответствующие минутам и гигабайтам, соединены сплошными и пунктирными линиями соответственно.

В течение года абонент пользовался тарифом «Популярный», абонентская плата по которому составляет 500 рублей в месяц. При условии нахождения абонента на

территории РФ в абонентскую плату тарифа «Популярный» входит:

- пакет минут, включающий 300 минут исходящих вызовов на номера, зарегистрированные на территории РФ;
- пакет интернета, включающий 4 гигабайта мобильного интернета;
- пакет SMS, включающий 100 SMS в месяц;
- безлимитные бесплатные входящие вызовы.

Стоимость минут, интернета и SMS сверх пакета указана в таблице (см. ниже)

Исходящие вызовы	3,5 руб./мин
Мобильный интернет: дополнительные пакеты по 0,5 Гб	100 руб. за пакет
SMS	3 руб./шт.

Абонент не пользовался услугами связи в роуминге и не звонил на номера, зарегистрированные за рубежом. За весь год абонент отправил 98 SMS.

1. Определите, какие месяцы соответствуют указанному в таблице трафику мобильного интернета. Заполните таблицу. В ответе запишите последовательность четырёх чисел без пробелов, запятых и других разделительных символов.

Мобильный интернет	1 Гб	2,5 Гб	3,75 Гб	1,5 Гб
Номера месяца				

Ответ: _____.

2. Сколько рублей потратил абонент на услуги связи в сентябре?

Ответ: _____.

3. Сколько месяцев в 2020 году абонент не превышал лимит ни по пакету минут, ни по пакету мобильного интернета?

Ответ: _____.

4. Известно, что в 2019 году абонентская плата по тарифу «Популярный» составляла 400 рублей. На сколько процентов выросла абонентская плата в 2020 году по сравнению с 2019 годом?

Ответ: _____.

5. В конце 2020 года оператор связи предложил абоненту перейти на новый тариф. Его условия приведены в таблице.

Стоимость перехода на тариф	0 руб.
Абонентская плата в месяц	450 руб.
В абонентскую плату ежемесячно включены:	
пакет исходящих минут	300 минут
пакет мобильного интернета	3,5 Гб
пакет SMS	90 SMS
После расходования пакетов:	
входящие вызовы	0 руб./мин
исходящие вызовы (на номера, зарегистрированные на территории РФ)	4 руб./мин
мобильный интернет: дополнительные пакеты по 0,5 Гб	180 руб./пакет
SMS	3 руб./шт.

Абонент решал, перейти ли ему на новый тариф, посчитав, сколько бы он потратил на услуги связи за 2020 год, если бы пользовался им. Если получилось бы меньше, чем он потратил фактически за 2020 год, то абонент принял бы решение сменить тариф. Если же получилось бы столько же или больше, то абонент оставил бы прежний тариф на 2019 год. Какова была ежемесячная абонентская плата (в рублях) абонента по тарифу в 2021 году?

Ответ: _____.

6. Найдите значение выражения $\frac{3^8 \cdot 3^{-5}}{3^{-9} \cdot 9^5}$.

Ответ: _____.

7. Известно, что $0 < a < 1$. Выберите наименьшее из чисел:

1) a^2

2) a^3

3) $-a$

4) $\frac{1}{a}$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

Ответ: _____.

8. Найдите значение выражения $\frac{(a^4)^4}{a^{14}}$ при $a = 6$.

Ответ: _____.

9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$$

В ответе запишите значение выражения $-4x_1 - y_1$, где $(x_1; y_1)$ – решение системы.

Ответ: _____.

10. Из каждых 1000 электрических лампочек 6 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Ответ: _____.

11. Даны функции $f(x)$. Установите соответствие между функциями $f(x)$ и областями определения этих функций. В ответе запишите последовательность цифр, соответствующих А, Б, В, Г, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

А) $f(x) = \sqrt{24 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$

Б) $f(x) = \sqrt{\frac{3 + 2x - x^2}{x - 2}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}$

В) $f(x) = x\sqrt{x - 5} + \sqrt{x^2(x - 5)}$

Г) $f(x) = \sqrt{x^2(x - 3)^2(x - 5)} + \sqrt{(2 + x)^2 x^5(9 - x)}$

1) $x \in (2; 3]$

2) $x \in [5; +\infty)$

3) $x \in \{0; 3\} \cup [5; 9]$

4) $x \in (4; 2\sqrt{6}]$

Ответ: _____.

12. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2 R$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R (в омах), если мощность составляет 28 Вт, а сила тока равна 2 А.

Ответ: _____.

13. Решите неравенство:

$$\frac{x^2}{3} > \frac{8x-9}{5}.$$

- 1) $\left(-\infty; \frac{9}{5}\right) \cup (3; +\infty)$ 2) $\left(\frac{9}{5}; 3\right)$ 3) $\left(-\infty; \frac{12}{5}\right) \cup \left(\frac{12}{5}; +\infty\right)$ 4) $\left(-\frac{9}{5}; 3\right)$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

Ответ: _____.

14. Пете надо решить 333 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Петя решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Петя в последний день, если со всеми задачами он справился за 9 дней.

Ответ: _____.

Модуль «Геометрия»

15. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в 2 раза больше стороны AB и $\angle ACD = 74^\circ$. Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

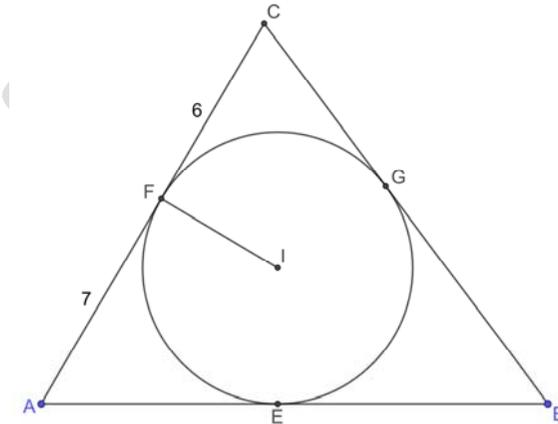
16. Найдите градусную меру $\angle ACB$, если известно, что BC является диаметром окружности ω с центром в точке O , а $\angle AOC = 96^\circ$. Точка A лежит на окружности ω .

Ответ: _____.

17. Периметр треугольника равен 110, одна из сторон равна 38, а радиус вписанной в него окружности равен 10. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: _____.

18. Дан треугольник ABC , в который вписана окружность ω с центром в точке I (см. рис.). Окружность ω касается стороны AC в точке F . Известно, что $AF = 7$, $FC = 6$, а площадь треугольника ABC равна 84. Найдите длину отрезка FI .



Ответ: _____.

19. Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Любые три прямые имеют не более одной общей точки.
- 2) Если угол равен 120° , то смежный с ним равен 120° .
- 3) Если расстояние от точки до прямой больше 3, то и длина любой наклонной, проведённой из данной точки к прямой, больше 3.

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Модуль «Алгебра»

20. Найдите значение выражения $\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-1} - \frac{\sqrt{6}+1}{15+10\sqrt{2}}$.

21. Пристани A и B расположены на реке, скорость течения которой на этом участке равна 3 км/ч. Лодка проходит туда и обратно без остановок со средней скоростью 8 км/ч. Найдите собственную скорость лодки (в км/ч).

22. Постройте график функции $y = |x-3| - |x+3|$. Определите, при каких значениях a прямая $y = ax + 2$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Модуль «Геометрия»

23. Основания трапеции равны 16 и 34. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

24. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D , причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD . Докажите, что $CD \perp EF$.

25. Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 16 и 48, вписаны в угол с вершиной A . Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K , пересекает стороны угла в точках B и C . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Ответ	62123	500	11	25	450	9	3	36	-10	0,994	4123	7	1	69	53	42	550	4	13	0	9	$(-\infty; -4/3), [0; \infty)$	9	-	32

Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант №344

Уровень 2

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

Модуль «Алгебра»

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5



рис. 1

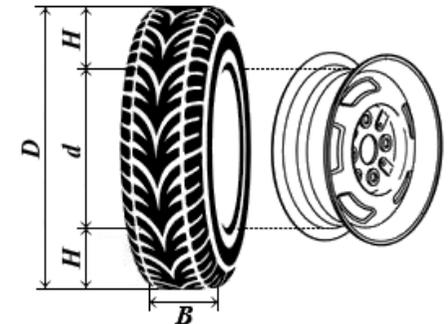


рис. 2

Автомобильное колесо, как правило, представляет собой металлический диск с установленной на него резиновой шиной (см. рис. 1 и рис. 2 выше). Диаметр диска совпадает с диаметром внутреннего отверстия в шине.

Для маркировки автомобильных шин применяется единая система обозначений. Например, 195/65 R15 (рис. 1).

Первое число (число 195 в приведённом примере) обозначает ширину шины в миллиметрах (параметр B на рисунке 2).

Второе число (число 65 в приведённом примере) — процентное отношение высоты боковины (параметр H на рисунке 2) к ширине шины, то есть $100 \cdot \frac{H}{B}$.

Последующая буква обозначает тип конструкции шины. В данном примере буква R означает, что шина радиальная, то есть нити каркаса в боковине шины расположены

вдоль радиусов колеса. На всех легковых автомобилях применяются шины радиальной конструкции.

За обозначением типа конструкции шины идёт число, указывающее диаметр диска колеса d в дюймах (в одном дюйме 25,4 мм). Таким образом, общий диаметр колеса D легко найти, зная диаметр диска и высоту боковины.

Возможны дополнительные маркировки, обозначающие допустимую нагрузку на шину, сезонность использования, тип дорожного покрытия и другие параметры.

Завод производит автомобили определённой модели и устанавливает на них колёса с шинами маркировки 265/60 R18.

Завод допускает установку шин с другими маркировками.

1. В таблице показаны разрешённые размеры шин (см. табл. ниже).

Шины какой наибольшей ширины (в мм) можно устанавливать на автомобиль, если диаметр диска равен 17 дюймам?

Ширина шины (мм)	Диаметр диска (дюймы)			
	17	18	19	20
245	245/70	–	–	–
255	255/70	255/65	–	–
265	265/65	265/60, 265/65	–	–
275	275/65	275/60	275/55	275/50
285	–	285/60	285/55	285/50

Ответ: _____.

2. На сколько миллиметров радиус колеса с шиной маркировки 245/70 R17 меньше, чем радиус колеса с шинами маркировки 275/65 R17?

Ответ: _____.

3. Найдите диаметр (в мм) колеса автомобиля, выходящего с завода.

Ответ: _____.

4. На сколько миллиметров увеличится диаметр колеса, если заменить колёса, установленные на заводе, колёсами с шинами маркировки 285/50 R20?

Ответ: _____.

5. Кирилл планирует заменить зимнюю резину на летнюю на своём автомобиле. Для каждого из четырёх колёс последовательно выполняются четыре операции: снятие колеса, замена шины, балансировка колеса, установка колеса. Он выбирает между автосервисами А и Б. Затраты на дорогу и стоимость операций даны в таблице (см. ниже).

Сколько рублей заплатит Кирилл за замену резины на своём автомобиле, если выберет самый дешёвый вариант?

Автосервис	А	Б
Суммарные затраты на дорогу (руб.)	270	450
Стоимость снятия колеса (руб./колесо)	57	52
Замена шины (руб./колесо)	235	205
Балансировка колеса (руб./колесо)	215	195
Установка колеса (руб./колесо)	57	52

Ответ: _____.

6. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{7\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 25$.

Ответ: _____.

7. Пусть a, b, c, d – действительные положительные числа. Причём $a+b+c+d=4$. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

$$abcd \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \right).$$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

- 1) 6 2) 5 3) 4 4) 3

Ответ: _____.

8. Найдите значение выражения $\frac{a^{-6}-64}{4+2a^{-1}+a^{-2}} \cdot \frac{a^2}{4-\frac{4}{a}+\frac{1}{a^2}} - \frac{4a^2(2a+1)}{1-2a}$ при $a=-5$.

Ответ: _____.

9. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases}$$

В ответе запишите значение выражения $3x_1 - y_1 - 2x_2 - 3y_2$, где $(x_i; y_i)$ – решение этой системы, причём $x_i \leq x_{i+1}$ и $y_i < y_{i+1}$, если $x_i = x_{i+1}$.

Ответ: _____.

10. Общество из 6 членов выбирает из своего состава одного представителя. Сколькими способами может произойти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

Ответ: _____.

11. На множестве действительных чисел $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ задана функция $f(x)$.

Также известно, что эта функция при любых действительных значениях $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ удовлетворяет уравнению:

$$f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 1.$$

Установите соответствие между выражениями для значений функции $f(x)$ и значениями этой функции. В ответе укажите последовательность трёх цифр, соответствующих А, Б, В, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|
| А) $f(9)$ | Б) $f(6)$ | В) $f(5)$ |
| 1) $\frac{9}{4}$ | 2) $\frac{11}{5}$ | 3) $\frac{17}{8}$ |

Ответ: _____.

12. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = pr$, где p – полупериметр треугольника, r – длина радиуса окружности, вписанной в этот треугольник. Полупериметр треугольника можно найти по формуле $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, где a, b, c – длины сторон треугольника. Вычислите длину стороны c , если $S = 24$, $a = 8$, $b = 6$, $r = 2$.

Ответ: _____.

13. Решите в действительных числах неравенство:

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) \geq 5.$$

В ответе укажите номер правильного варианта ответа.

1) $x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{2}\right]$

2) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{12}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

3) $x \in \emptyset$

4) $x \in (-\infty; +\infty)$

Ответ: _____.

14. Футбольный мяч катится так, что за первую секунду он проходит путь 0,6 м, а в каждую следующую секунду путь увеличивается на 0,6 м по сравнению с предыдущей. Сколько секунд будет катиться мяч по горке длиной 6 метров?

Ответ: _____.

Модуль «Геометрия»

15. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3\sqrt{7}$, высота $CD = \sqrt{21}$. Основание D высоты CD лежит на стороне AB и $AD = BC$. Найдите AC .

Ответ: _____.

16. В прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 26, вписана окружность радиуса 4. Найдите периметр треугольника.

Ответ: _____.

17. В окружность ω вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на отрезок CD , пересекающие прямые BD и AC в точках K и L соответственно. Найдите периметр четырехугольника $AKLB$, если известно, что $AK = 7$.

Ответ: _____.

18. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$. Найдите значение выражения $\frac{AC \cdot AE}{S}$, где S – площадь восьмиугольника $ABCDEFGH$.

Ответ: _____.

19. Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Площадь треугольника меньше произведения двух его сторон.
- 2) Угол, вписанный в окружность, равен соответствующему центральному углу, опирающемуся на ту же дугу.
- 3) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, перпендикулярную этой прямой.

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Модуль «Алгебра»

20. Решите в целых числах систему:

$$\begin{cases} \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz} = 3 \\ x \leq y \leq z \end{cases}.$$

21. У каждого из 1000 гномов есть колпак, синий снаружи и красный внутри (или наоборот). Если на гноме надет красный колпак, то он может только лгать, а если синий – только говорить правду. На протяжении одного дня каждый гном сказал каждому: «На тебе красный колпак!» (при этом некоторые гномы в течение дня выворачивали свой колпак наизнанку). Найдите наименьшее возможное количество выворачиваний.

22. Найдите все действительные значения параметра a на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, при каждом из которых модуль разности между любыми двумя соседними действительными корнями уравнения:

$$\cos a \cos 3x - \sin 3a \cos x + 2 \sin 2a \cos 2x = 3 \sin a - \cos 3x$$

не превосходит $\frac{\pi}{3}$ и множество корней этого уравнения не содержит число 2023.

Модуль «Геометрия»

23. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC , причем $BP = BQ$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC . Найдите градусную меру угла DHQ .

24. Даны восемь вещественных чисел a, b, c, d, e, f, g, h . Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd, ae+bf, ag+bh, ce+df, cg+dh, eg+fh$ неотрицательно.

25. В окружность ω вписан остроугольный треугольник ABC . Касательные прямые к окружности ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке D . Касательные прямые к окружности ω , проведённые через точки A и B , пересекаются в точке E . Отрезки BD и AC пересекаются в точке P . Отрезки EC и BA пересекаются в точке Q . Точка X – середина отрезка BP . Точка Y – середина отрезка QC . Найдите значение выражения $\frac{\angle XCB}{\angle CBY}$.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Ответ	275	7,25	775,2	17,8	2466	-0,04	3	-9	-9	46656	321	10	2	4	7	60	28	1	13	(-4;1;1),(1;3;8), (1;4;5),(2;2;3)	998	2π	90	-	1