

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Новогодний тренировочный вариант № 412
 (совместный проект alexlarin.net и egemathschool.ru)

Профильный уровень
 Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КММ Ответ: -0,8 10 - 0,8 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

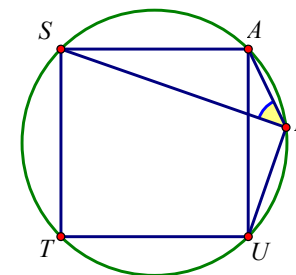
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1-11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

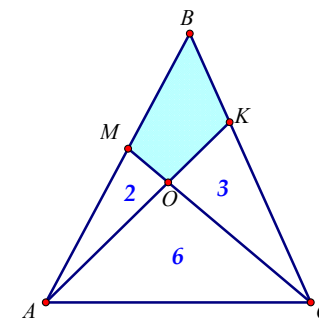


1.1. В одну и ту же окружность вписан квадрат UTSA и треугольник SAL. Найдите угол SLA. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

1.2. Две прямые АК и СМ делят треугольник ABC на три треугольника и один четырехугольник. На рисунке цифрами обозначены площади этих треугольников. Найдите площадь четырехугольника ВМОК.



Ответ: _____.

2.1. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{5}$ высоты. Объем сосуда равен 2023 мл. Найдите объем налитой жидкости? Ответ запишите в миллилитрах.



Ответ: _____.

2.2. Высота правильной треугольной пирамиды равна 23, а двугранный угол при основании равен 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды S . В ответе запишите $\frac{S}{\sqrt{6}}$.

Ответ: _____.

3.1. Ангелина отправляет СМС на телефон Деда Мороза. Связь плохая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,2. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена не позже, чем с четвертой попытки.

Ответ: _____.

3.2. В мешке подарков Деда Мороза лежат цветные шарики: 3 красных, 3 зеленых и 4 синих. Найдите вероятность того, что среди шести случайно выбранных шариков окажутся ровно 1 красный, 2 зеленых и 3 синих. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

4.1. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: 1 класс – малый риск, 2 класс – средний, 3 класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% - первого класса риска, 30% - второго и 20% - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Найдите вероятность того, что получивший денежное вознаграждение застрахованный относится к группе малого риска. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

4.2. Дед Мороз хочет посадить во дворе своей резиденции 4 ели и по этой причине отправляется в садовый магазин за саженцами. По опыту он знает, что из 10 саженцев в среднем два саженца не приживаются. Какое минимальное количество саженцев должен купить Дед Мороз, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хотя бы 4 из них прижились?

Ответ: _____.

5.1. Решите уравнение $2023^{\sin(\pi x)} = \frac{1}{2023}$. В ответе укажите наименьший положительный корень уравнения.

Ответ: _____.

5.2. Решите уравнение $\log_{2023-x} 4 - \log_{2023-x} 2 - 0,5 = 0$

Ответ: _____.

6.1. Найдите значение выражения $289^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot 17^{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \cdot 119$.

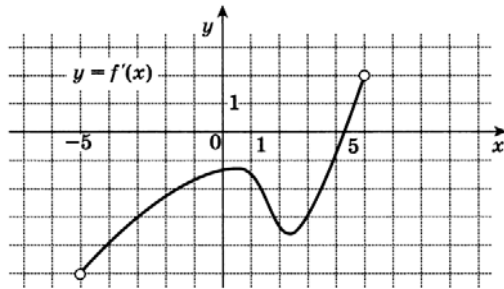
Ответ: _____.

6.2. Найдите значение выражения

$$\frac{(1 - 2 \cos^2 1011,5^\circ) \cdot 2022}{(\cos 1011,5^\circ - \sin 1011,5^\circ) \cdot (\cos 1011,5^\circ + \sin 1011,5^\circ)}$$

Ответ: _____.

7.1. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции. Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 120° к положительному направлению оси абсцисс.



Ответ: _____.

7.2. Прямая $y = kx + 2023$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 4x + 2077$. Найдите значение коэффициента k .

Ответ: _____.

8.1. Операционная прибыль предприятия по производству новогодних гирлянд за месяц равна разности между выручкой и расходами $S = n \cdot a - n \cdot b - C$, где n — объем производства (количество произведенной продукции); a — продажная цена; b — себестоимость (затраты на единицу продукции); C — постоянные расходы предприятия в месяц. Фирма продает гирлянды по цене 700 рублей себестоимостью 100 рублей за единицу. Постоянные расходы фирмы на производство 200000 рублей в месяц. Чему равна месячная операционная прибыль предприятия (в млн руб) при объеме производства 2000 единиц продукции?

Ответ: _____.

8.2. Трактор тащит сани с силой $F = 70$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 100$ м равна $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 3500 кДж?

Ответ: _____.

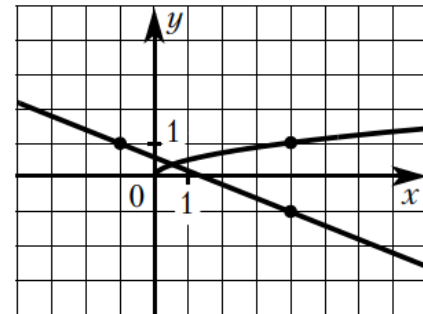
9.1. Снеговик проехал на велосипеде 60 км из пункта А в пункт В. На обратном пути он первый час проехал с прежней скоростью, после чего сделал остановку на 20 мин. Начав движение снова, он увеличил скорость на 4 км/ч и поэтому потратил на путь из В в А столько же времени, сколько и на путь из А в В. Определите скорость снеговика при движении на велосипеде на пути из А в В? Ответ запишите в км/ч.

Ответ: _____.

9.2. На уборке снега работают две снегоочистительные машины. Первая может убрать всю улицу за 1 ч, а вторая — за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 мин, после чего первая машина прекратила работу. Сколько еще нужно времени, чтобы вторая машина закончила работу? Ответ запишите в минутах.

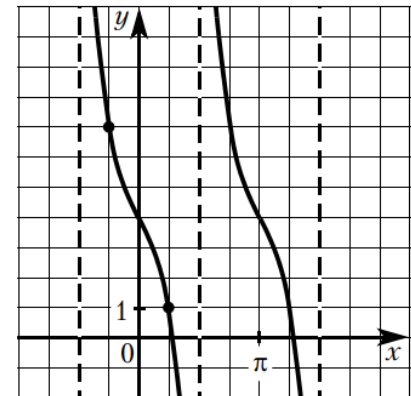
Ответ: _____.

10.1. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке А. Найдите ординату точки А.



Ответ: _____.

10.2. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cdot \operatorname{tg} x + b$. Найдите a .



Ответ: _____.

11.1. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^3 - 3x + 11}$ на отрезке $[0; 2023]$.

Ответ: _____.

11.2. Найдите точку минимума функции $y = (1 - 0,4x) \sin x - 0,4 \cos x$, принадлежащую промежутку $(0; 2\pi)$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания



Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12.1. А) Решите уравнение $\sin x \cdot (1 + \cos x) = \cos^2 x + \cos x + 1$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$

12.2. А) Решите уравнение $2024 \cdot 3^{\sqrt{1-\cos^2 x}} - 3^{\sin x} = 2023$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

13.1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 12, точки К и L – середины ребер AD и $C_1 D_1$ соответственно, а точка F расположена на ребре BC так, что $CF = 3BF$.

А) Докажите, что плоскость KLF делит диагональ AC основания ABCD в отношении 2:3, считая от точки A.

Б) Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости KLF.

13.2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM:MD_1 = 3:2$. Плоскость α параллельна прямой $A_1 F_1$ и проходит через точки M и E.

А) Докажите, что сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α – равнобедренная трапеция.

Б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F, а основанием – сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α .

14.1. Решите неравенство: $\frac{\log_{\sqrt{2}}(4^{x+1} - 2^{x+3} + 4)}{\log_{2^{x-1}} 2} < 80$

14.2. Решите неравенство: $\log_{0,5} \frac{|x^2 - 2x| + 4}{|x + 2| + x^2} \leq 0$

15.1. В июле 2023 года Иван Морозов планирует взять кредит на 8 лет в размере 800000 рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь с 2024 по 2027 год долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2028 по 2031 год долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Определите r , если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тыс. рублей.

15.2. Предприятие производит детские санки и является убыточным. Известно, что при изготовлении x санок в месяц расходы предприятия на выпуск одних санок составляют $\left(\frac{168000}{x} + 36 - \left|12 - \frac{72000}{x}\right|\right)$ тыс. рублей, а цена реализации каждой единицы продукции равна $\left(72 - \frac{3x}{1000}\right)$ тыс. рублей. Определите ежемесячный объем производства (в тыс. санок), при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего возможного уровня.

16.1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота ВН и медиана АМ, причем точки А, В, Н и М лежат на одной окружности.
А) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
Б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AM : BH = 4 : 3$ и $MH = 3$.

16.2. На сторонах острого угла с вершиной О взяты точки А и В. На луче ОВ взята точка М на расстоянии $3 \cdot OA$ от прямой ОА, а на луче ОА – точка N на расстоянии $3 \cdot OB$ от прямой ОВ. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника АОВ, равна 3.
А) Докажите, что треугольник АОВ подобен треугольнику MON.
Б) Найдите длину отрезка MN.

17.1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0$$

имеет хотя бы один корень на промежутке $[0,5; 4]$.

17.2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых все решения уравнения:

$$3^{1-x^2-2ax-2a} = \log_3 \frac{|x+a|+5|a-1|}{2|a-1|}$$

принадлежат отрезку $[-3; 0]$

18.1. Марина составляет из n четверок числа и находит всевозможные их суммы. Например, если $n = 4$, то возможных сумм было бы 5:
1) $4 + 4 + 4 + 4 = 16$; 2) $4 + 4 + 44 = 52$; 3) $44 + 44 = 88$; 4) $444 + 4 = 448$; 5) 4444 .
А) Может ли одна из сумм S равняться 460, если $n = 25$?
Б) Может ли одна из сумм S равняться 800, если $n = 25$?
В) Сколько существует различных значений n , для которых одна из сумм равна 800?

18.2. В резиденции Деда Мороза работает не менее 60 и не более 80 гномиков. Дед Мороз проводит собрание. К началу собрания пришло меньше половины гномиков (а возможно, что и никто не пришел). Спустя 10 минут после объявленного начала на собрание пришел еще один гномик.
А) Могло ли получиться так, что после этого на собрании присутствовало больше половины гномиков?
Б) Возможно ли, что и до и после прихода опоздавшего гномика процент гномиков на собрании выражался целым числом?
В) Какое наибольшее целое значение мог принять процент так и не пришедших на собрание гномиков?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.