

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

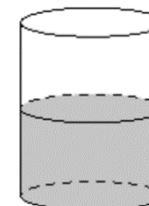
Часть 1

- 1** Найдите центральный угол, если он на 28° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

- 2** В цилиндрический сосуд налили 2800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.



Ответ: _____.



- 3 На олимпиаде по русскому языку 350 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 140 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: _____.

- 4 При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,82. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 8^x.$$

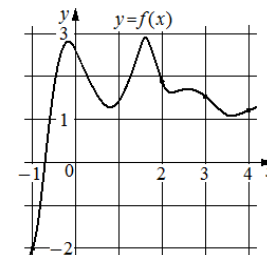
Ответ: _____.

- 6 Найдите значение выражения

$$30 \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ - 43.$$

Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-1, 2, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____.

- 8 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

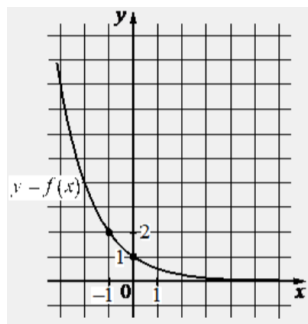
Ответ: _____.

- 9 Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 22:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 8 км/ч.

Ответ: _____.



- 10 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-4)$.



Ответ: _____.

- 11 Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5 \text{ на отрезке } [9; 36].$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$\cos 2x - 3 \cos(-x) + 2 = 0.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right].$$

- 13 В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

- 14 Решите неравенство

$$\frac{2^{5+x} - 2^{-x}}{2^{3-x} - 4^{-x}} \geq 2^x.$$

- 15 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.



- 16 В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N ; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.

- 17 Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

- 18 Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N — натуральное число) больше правильного результата.

а) Могло ли N равняться 2?
б) Могло ли N равняться 10?
в) Каково наибольшее возможное значение N ?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	56	
2	2275	
3	0,2	
4	0,78	
5	1,5	
6	-13	
7	-1	
8	9,2	
9	2	
10	16	
11	-77	
12	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $2\pi; \frac{7\pi}{3}$	
13	90	
14	$(-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$	
15	12	
16	3:1	
17	$(-1; 5)$	
18	а) да б) нет в) 9	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



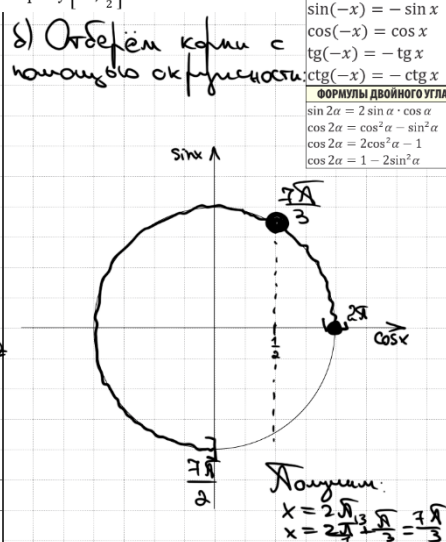
12 а) Решите уравнение

$$\cos 2x - 3 \cos(-x) + 2 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

а) $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$
 $2 \cos^2 x - 1 - 3 \cos x + 2 = 0$
 $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$
 $\cos x = t$
 $2t^2 - 3t + 1 = 0$
 $D = 9 - 8 = 1$
 $t = \frac{3 \pm 1}{4}$
 $t = 1$ $t = \frac{1}{2}$
 $\cos x = 1$ $\cos x = \frac{1}{2}$
 $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ОТВЕТ: а) $2\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $2\pi, \frac{7\pi}{3}$



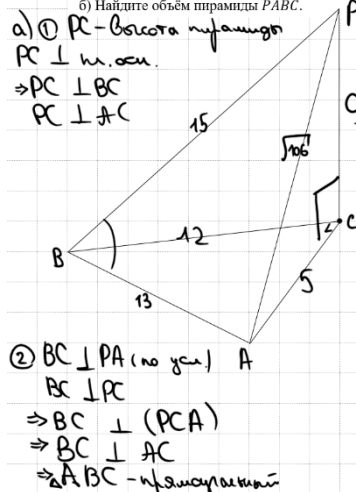
Источники:

Основная волна 2022
 ЧЕТНОСТЬ
 $\sin(-x) = -\sin x$
 $\cos(-x) = \cos x$
 $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
 $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
 ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

13

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 б) Найдите объём пирамиды $PABC$.



ОТВЕТ: 90

б) 1) $\triangle ABP$:
 $AP = \sqrt{15^2 + 13^2 - 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \frac{48}{65}} = \sqrt{225 + 169 - 288} = \sqrt{106}$

2) $\triangle ABC$:
 $\triangle PBC$:
 $\triangle APC$:
 $\begin{cases} 13^2 = AC^2 + BC^2 \\ 15^2 = PC^2 + BC^2 \\ AC^2 = PC^2 + AC^2 \end{cases}$
 $+ \begin{cases} 56 = PC^2 - AC^2 \\ 106 = PC^2 + AC^2 \end{cases}$
 $162 = 2PC^2$
 $PC^2 = 81$
 $PC = 9$

3) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 9 = 90$

Источники:

Горлат #14 2019
 Основная волна (Резерв) 2017

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

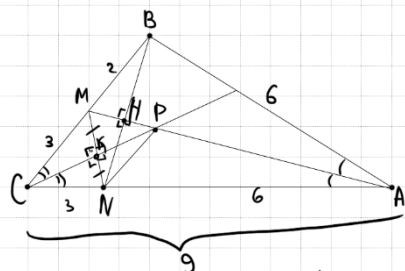
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



16 В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N ; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.

Источники:
Ященко 2018
Основная волна (Резерв) 2014



а) ① по т. о биссектрисе:
 $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ и $BC=5 \Rightarrow BM=2, CM=3$

② $\triangle ABN$ — равноб., т.к. AM — высота и биссектриса.

③ $\triangle CMN$ — равноб.
 $\Rightarrow CM$ — биссектриса и медиана
 $\Rightarrow K$ — середина MN

б) ① $\triangle PMN$ — равноб., т.к. PK — высота и медиана
 $\Rightarrow \frac{AP}{PN} = \frac{AP}{PM}$

② $\triangle ACM$:
 PC — биссектриса
по т. о бисс.:
 $\frac{AP}{PM} = \frac{AC}{CM} = \frac{9}{3} = 3$

ОТВЕТ: 3 : 1

17 Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1} < 3$ выполняется при всех x .

Источники:
ФИПИ (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2012
СВОЙСТВА МОДУЛЯ
 $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
 $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
 $|a|^2 = a^2$

$(x^2+2.05x+0.75) + 0.75$

① $D_1 < 0$
 $(3+a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 < 0$
 $(3+a-8)(3+a+8) < 0$
-11 5

② $D_2 < 0$
 $(3-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$
 $(3-a-4)(3-a+4) < 0$
-1 7

Найдем пересечение:
-11 -1 5 7

ОТВЕТ: $[-1; 5]$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



18

Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата.

- а) Могло ли N равняться 2?
 б) Могло ли N равняться 10?
 в) Каково наибольшее возможное значение N ?

Источники:

ФПР (старый банк)
 ФПР (новый банк)
 Семёнов 2015

а) Пусть x – двузначное число
 y – трёхзначное число

$$\frac{x \cdot y}{x \cdot 1000 + y} = 2$$

$$\frac{x \cdot 1000 + y}{x \cdot y} = 2$$

$$1000x + y = 2xy$$

$$1000x - 2xy = -y$$

$$x \cdot (1000 - 2y) = -y$$

$$x = \frac{y}{2y - 1000} = \frac{y}{2 \cdot (y - 500)}$$

Если $y = 501$

$$\frac{501}{2 \cdot (501 - 500)} = \frac{501}{2} = 250,5$$

а) Да

б) Нет

в) 9

$$\frac{63504}{63 \cdot 504} = 2$$

$$\delta) \frac{1000x + y}{xy} = 10$$

$$1000x + y = 10xy$$

$$1000x - 10xy = -y$$

$$x \cdot (1000 - 10y) = -y$$

$$x = \frac{y}{10y - 1000}$$

$$x = \frac{y}{10 \cdot (y - 100)}$$

$$x = \frac{10xy - y}{1000}$$

$$x = \frac{y(10x - 1)}{1000}$$

y обязан делиться на 1000
 на y – трёхзначное
 $\Rightarrow$ Ответ: б) нет

$$\beta) \frac{1000x + y}{x \cdot y} = N$$

$$\frac{1000}{y} + \frac{1}{x} = N$$

$$N_{\min} = \frac{1000}{100} + \frac{1}{10} = 10,1$$

$$\Rightarrow N \leq 10,1$$

$$N = 10 \text{ не подходит (см. п. б)}$$

Проверим $N = 9$

$$1000x + y = 9xy$$

$$1000x - 9xy = -y$$

$$x \cdot (1000 - 9y) = -y$$

$$x = \frac{y}{9y - 1000}$$

Если $y = 112$, то $x = \frac{112}{8} = 14$

$$\frac{14 \cdot 112}{14 \cdot 112} = 9$$

– обоснованное решение пункта б);

– искомая оценка в пункте в);

– пример в пункте в), обеспечивающий точность предыдущей оценки

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

0

Максимальный балл

4

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а);	1





В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.