

3 Фабрика выпускает сумки. В среднем 6 сумок из 75 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Ответ: _____.

4 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: _____.

5 Найдите корень уравнения

$$(x + 9)^2 = 36x.$$

Ответ: _____.

6 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_5 2}{\log_5 13} + \log_{13} 0,5.$$

Ответ: _____.

7 Прямая $y = -3x - 5$ является касательной к графику функции $y = x^2 + 7x + c$. Найдите c .

Ответ: _____.

8 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 120 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит 320 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

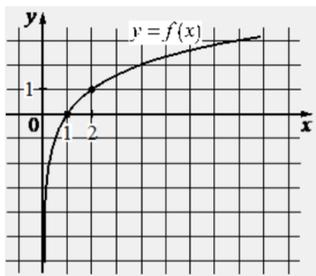
Ответ: _____.

9 Первый час автомобиль ехал со скоростью 115 км/ч, следующие три часа – со скоростью 45 км/ч, а затем два часа – со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.



- 10** На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.



Ответ: _____.

- 11** Найдите наибольшее значение функции $y = 33x - 30 \sin x + 29$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12** а) Решите уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

- 13** Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

- а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
 б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

- 14** Решите неравенство

$$\log_2(4x^2 - 1) - \log_2 x \leq \log_2\left(5x + \frac{9}{x} - 11\right).$$

- 15** Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15\,000 - P$, $1000 \leq P \leq 15\,000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

16 Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает диагональ BD в точке K .

- а) Докажите, что произведение $CK \cdot CE$ равно площади квадрата.
б) Найдите отношение $CK:KE$, если $\angle ECD = 15^\circ$.

17 Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

18 Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел, последние цифры которых не равны нулю, поделили на его последнюю цифру. Сумма получившихся чисел равна S .

- а) Может ли S быть равной $16\frac{5}{6}$?
б) Может ли S быть равной $369\frac{29}{126}$?
в) Найдите наибольшее целое значение S , если каждое из исходных чисел было трёхзначным.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	98
2	3
3	0,92
4	0,6
5	9
6	0
7	20
8	8
9	55
10	4
11	29
12	а) $\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$ б) $3\pi; 4\pi; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$
13	6
14	$(0,5; 1] \cup [10; +\infty)$
15	12,5%
16	2
17	$(0; 1)$
18	а) да б) нет в) 2004

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение

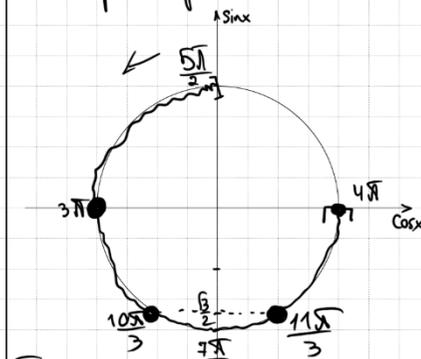
$$2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

а) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$
 $\sin x \cdot (2\sin x + \sqrt{3}) = 0$
 $\sin x = 0$
 $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
 $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим числа
 $x = 3\pi$
 $x = 4\pi$
 $x = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$
 $x = 4\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$

ОТВЕТ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
 б) $3\pi; 4\pi; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$

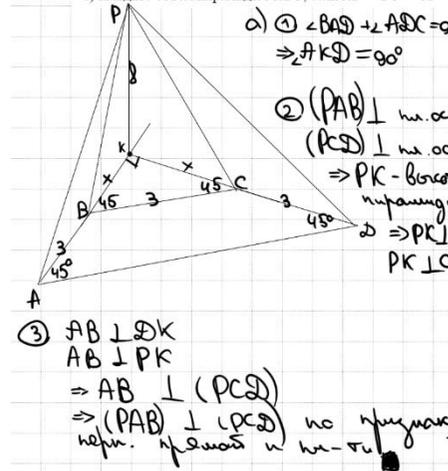
Источники:

Основная волна 2020
 Ященко 2018
 Ященко 2018
 Статград 06.02.2019

13

Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
 б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.



а) ① $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle AKD = 90^\circ$
 ② $(PAB) \perp$ на осн
 $(PCD) \perp$ на осн
 $\Rightarrow PK$ – высота пирамиды
 $\Rightarrow PK \perp AB$
 $PK \perp CD$

б) ① Пусть $BK = x = CK$
 т.к. $\triangle BKC$ – равност.
 $\angle KBC = 45^\circ = \angle KCB$

② Рассмотрим $\triangle BKC$ на т. Пиф.
 $3^2 = x^2 + x^2$
 $x^2 = \frac{9}{2}$
 $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 8 = 6$$

ОТВЕТ: 6

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Горини #14 2019
 Основная волна 2017
 ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ
 Плоскости перпендикулярны, если одна из плоскостей содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



14 Решите неравенство $\log_2(4x^2 - 1) - \log_2 x \leq \log_2(5x + \frac{9}{x} - 11)$.

Источники:
 ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2018
 Ященко 2019 (36 вар)

① $4x^2 - 1 > 0$
 ② $x > 0$
 ③ $5x + \frac{9}{x} - 11 > 0$
 ④ $\frac{4x^2 - 1}{x} \leq 5x + \frac{9}{x} - 11$

① $4x^2 - 1 > 0$
 $(2x - 1)(2x + 1) > 0$

③ $5x^2 - 11x + 9 > 0$

ОТВЕТ: $(\frac{1}{2}; 1] \cup [10; +\infty)$

④ $\frac{4x^2 - 1 - 5x^2 + 11x - 9}{x} \leq 0$
 $\frac{-x^2 + 11x - 10}{x} \leq 0 \quad | \cdot (-1)$
 $\frac{x^2 - 11x + 10}{x} \geq 0$

④ $\frac{4x^2 - 1 - 5x^2 + 11x - 9}{x} \leq 0$
 $\frac{-x^2 + 11x - 10}{x} \leq 0 \quad | \cdot (-1)$
 $\frac{x^2 - 11x + 10}{x} \geq 0$

④ $\frac{4x^2 - 1 - 5x^2 + 11x - 9}{x} \leq 0$
 $\frac{-x^2 + 11x - 10}{x} \leq 0 \quad | \cdot (-1)$
 $\frac{x^2 - 11x + 10}{x} \geq 0$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15\,000 - P$, $1000 \leq P \leq 15\,000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Источники:
 Основная волна (Резерв) 2018
 Основная волна (Резерв) 2015

① **Цены равно (Прибыль)**
 $PQ - (3000Q + 5000000) =$
 $= P(15000 - P) - 3000(15000 - P) - 5000000$
 $= -P^2 + 18000P - 5000000$

② **Найдём при какой цене P будет макс. прибыль**
 $P_{верш} = \frac{-b}{2a} = \frac{-18000}{-2} = 9000$

③ **Прибыль (р) = Прибыль (0,8р)**
 $-P^2 + 18000P - 5000000 = -0,64P^2 + 18000 \cdot 0,8P - 5000000$
 $0,36P^2 - 3600P = 0$
 $P(0,36P - 3600) = 0$
 $P = 0$ (не подходит)
 $P = 10000$ — Первоначальная
 $0,8P = 8000$ — (сниженная цена)

④ $8000P - 100\%$
 $9000P - 112,5\%$
 $? = \frac{9000 \cdot 100}{8000} = 112,5$

ОТВЕТ: 12,5%

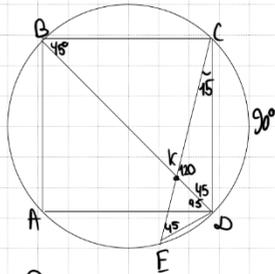
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



16 Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает диагональ BD в точке K .

- а) Докажите, что произведение $CK \cdot CE$ равно площади квадрата.
 б) Найдите отношение $CK:KE$, если $\angle ECD = 15^\circ$.

Источники:
 Ященко 2018
 Основная волна 2016



$CK \cdot CE = CD^2$

б) ① по $\sin \triangle CDK$:
 $\frac{CD}{\sin 120^\circ} = \frac{CK}{\sin 45^\circ}$
 $CK = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot CD \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} CD$

② по $\sin \triangle CDE$:
 $\frac{CE}{\sin 120^\circ} = \frac{CD}{\sin 45^\circ}$
 $CE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot CD \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} CD$
 $KE = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} CD - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} CD = \frac{1}{\sqrt{6}} CD$
 $\frac{CK}{KE} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} CD}{\frac{1}{\sqrt{6}} CD} = 2$

а) ① Рассмотрим $\triangle CDK$ и $\triangle CDE$
 $\angle DCE$ - общий
 $\angle CDK = 45^\circ = \angle CED = 45^\circ$
 (т.к. центр на $CD=90^\circ$)
 $\Rightarrow \triangle CDK \sim \triangle CDE$
 $\frac{CK}{CD} = \frac{CD}{CE}$
 $CK \cdot CE = CD^2$

ОТВЕТ: 2

17 Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

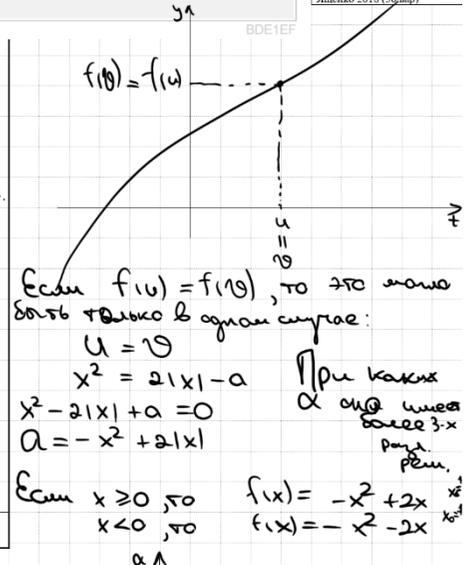
Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 Основная волна (Резерв) 2012
 Ященко 2018 (30 вар)

$x^{10} + x^2 = (2|x| - a)^5 + (2|x| - a)$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^5 + t$
 $f'(t) = 5t^4 + 1$
 $\Rightarrow f(t)$ возрастает на всей области определения.

Пусть $u = x^2$
 $19 = 2|x| - a$

Получаем $u^5 + u = 19^5 + 19$
 $f(u) = f(19)$



ОТВЕТ: $(0; 1)$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4



18 Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел, последние цифры которых не равны нулю, поделить на его последнюю цифру. Сумма полученных чисел равна S .

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 Досрочная волна 2022

- а) Может ли S быть равной $16\frac{5}{6}$?
- б) Может ли S быть равной $369\frac{29}{126}$?
- в) Найдите наибольшее целое значение S , если каждое из исходных чисел было трёхзначным.

а) Если брать числа до 9 включительно, то $S=4$

Если 11, 12, 13, 14

Если 12, 13, 14, 15

$$S = \frac{12}{6} + \frac{13}{3} + \frac{14}{2} + \frac{15}{3} = 16\frac{5}{6}$$

б) Да, для 12, 13, 14, 15

в) Для максимизации последние цифры должны быть 1, 2, 3, 4

$$\frac{10x+1}{1} + \frac{10x+2}{2} + \frac{10x+3}{3} + \frac{10x+4}{4}$$

$$S = 10x + 1 + 5x + 1 + 3x + \frac{1}{3}x + 1 + 2x + \frac{1}{2}x + 1$$

$$S = 20x + \frac{5}{6}x + 4$$

Чтобы S было целым, выберем наибольшее двузначное x , кратное 6, т.е. 96

$$\frac{961}{1} + \frac{962}{2} + \frac{963}{3} + \frac{964}{4} = 2004$$

Если последние цифры не 1, 2, 3, 4, то каждое слагаемое < 500 и общая сумма < 2000

д) $126 \begin{array}{l} 2 \\ 63 \ 3 \\ 21 \ 3 \\ 7 \ 7 \end{array} \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

Среди слагаемых последние цифры были 6, 7, 8, 9

$$10x+6 \quad 10x+7 \quad 10x+8 \quad 10x+9$$

$$\frac{10x+6}{6} + \frac{10x+7}{7} + \frac{10x+8}{8} + \frac{10x+9}{9} = 369\frac{29}{126}$$

$$\frac{10x}{6} + 1 + \frac{10x}{7} + 1 + \frac{10x}{8} + 1 + \frac{10x}{9} + 1 = 369\frac{29}{126}$$

$$10x \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) = 365\frac{29}{126}$$

$$10x \cdot \frac{275}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} = 365\frac{29}{126}$$

$$X = \frac{365 \cdot 126 + 29}{126} \cdot \frac{504}{10 \cdot 275}$$

$$X = \frac{92038}{1375} \neq Z$$

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.



3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

