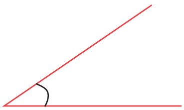
Вся геометрия 7 класса в кратком изложении

Памятка

(к учебнику Л.С. Атанасяна и др.)

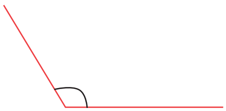
Содержание

Виды углов



острый

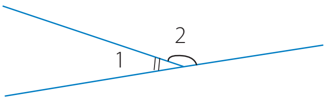
прямой



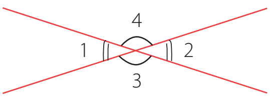
тупой

развернутый

Смежные и вертикальные углы



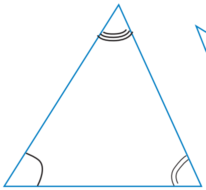
Углы 1 и 2 – смежные $\Rightarrow$ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$



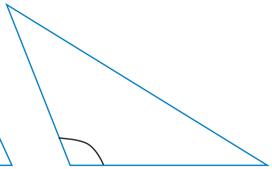
$\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – вертикальные

Вертикальные углы равны

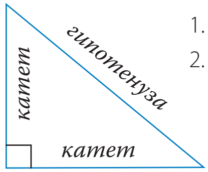
Виды треугольников



остроугольный



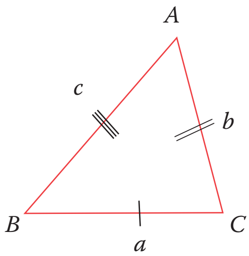
тупоугольный



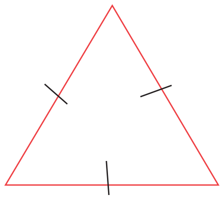
прямоугольный

В любом треугольнике:

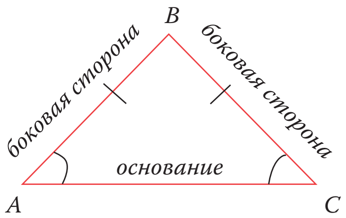
1. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
2. $|b - c| < a < b + c$



разносторонний



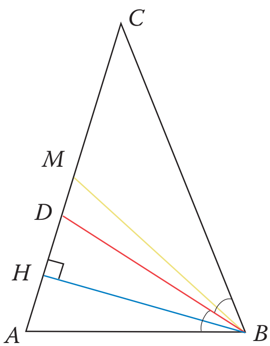
равносторонний



равнобедренный

$\triangle ABC;\ AB = BC \iff \angle A = \angle C$

Биссектриса, медиана и высота треугольника



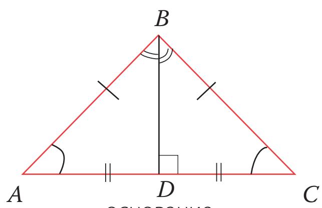
BD – биссектриса $\iff \angle ABD = \angle CBD$

BM – медиана $\iff AM = MC$

BH – высота $\iff BH \perp AC$

Эти три отрезка совпадают, когда они проведены к основанию равнобедренного треугольника.
Доказательство опирается на 1-ый признак равенства треугольников

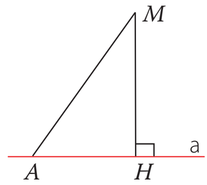
$\triangle ABC;\ AB = BC$
BD – биссектриса
$\Rightarrow$
BD – медиана
BD – высота



Перпендикуляр и наклонная

Теорема

Из точки M к прямой а можно провести только один перпендикуляр MH.

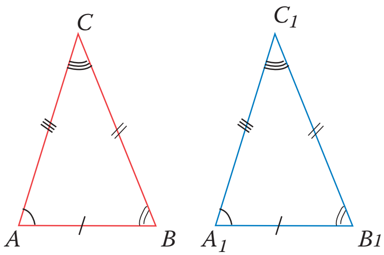


Отрезок $MH \perp a$

Отрезок MA называют наклонной, проведенной из точки M к прямой a.
$MH < MA$

Расстояние от точки M до прямой a – это длина перпендикуляра MH.

Равенство треугольников



Определение

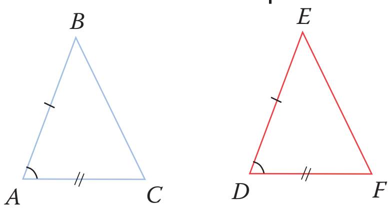
Геометрические фигуры называются равными, если при наложении они совпадают.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$; в равных треугольниках соответствующие стороны и соответствующие углы равны.
При этом против равных углов лежат равные стороны, а против равных сторон – равные углы.

Три признака равенства треугольников

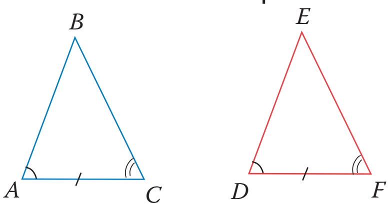
Первые два доказываются наложением, а 3-ий признак – приложением с использованием свойств равнобедренного треугольника.

1-ый признак. По двум сторонам и углу между ними



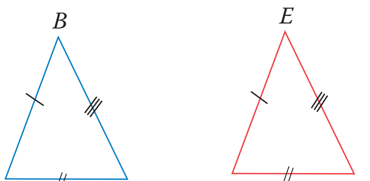
$$\begin{array}{c} AB = DE \\ AC = DF \\ \angle A = \angle D \end{array} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$$

2-ой признак. По стороне и прилегающим к ней углам



$$\begin{array}{c} AC = DF \\ \angle A = \angle D \\ \angle C = \angle F \end{array} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$$

3-ий признак. По трем сторонам

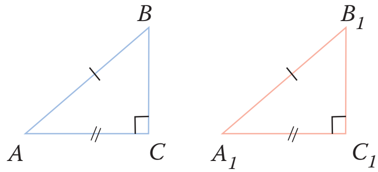


$$\begin{array}{c} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{array} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$$

Признаки равенства прямоугольных треугольников

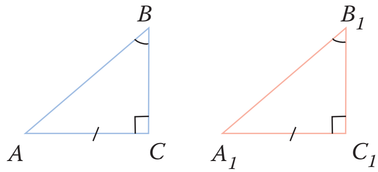
1-ый признак. По гипотенузе и катету

$AB = A_1B_1$
$AC = A_1C_1$
$\Rightarrow$ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



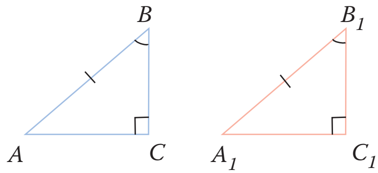
2-ой признак. По катету и противолежащему острому углу

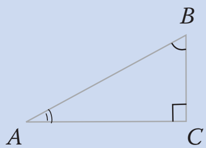
$AC = A_1C_1$
$\angle B = \angle B_1$
$\Rightarrow$ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



3-ий признак. По гипотенузе и острому углу

$AB = A_1B_1$
$\angle B = \angle B_1$
$\Rightarrow$ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



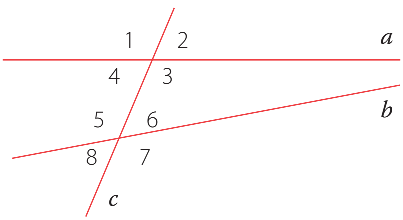


1) $\angle A + \angle B = 90°$

2) Если $\angle A = 30°$, то $BC = 1/2\ AB$

Прямые на плоскости

Прямые на плоскости могут: 1) пересекаться ($a \cap b = M$)
2) не пересекаться, такие прямые называются параллельными ($n \parallel m$)



Прямые a и b пересечены секущей c.

Накрестлежащие углы: 3 и 5, 4 и 6

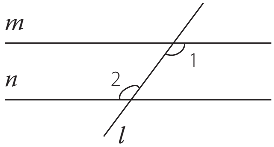
Внутренние односторонние углы: 3 и 6, 4 и 5

Соответственные углы: 1 и 5, 2 и 6, 4 и 8, 3 и 7

Три признака параллельности прямых и обратные им теоремы

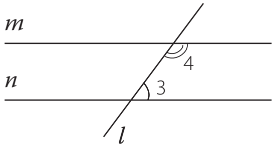
1 признак

$\angle 1$ и $\angle 2$ – внутренние накрестлежащие при m, n и секущей l и $\angle 1 = \angle 2$ $\Leftrightarrow$ $m \parallel n$



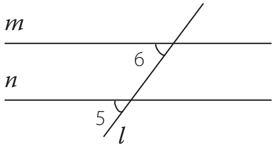
2 признак

$\angle 3$ и $\angle 4$ – внутренние односторонние при m, n и секущей l и $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ $\Leftrightarrow$ $m \parallel n$

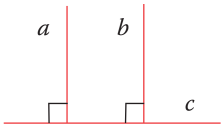


3 признак

$\angle 5$ и $\angle 6$ – соответственные при m, n и секущей l и $\angle 5 = \angle 6$ $\Leftrightarrow$ $m \parallel n$



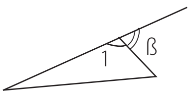
$a \perp c$, $b \perp c$ $\Rightarrow$ $a \parallel b$



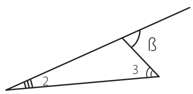
Отрезки называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.
Аналогично дается определение параллельности 2-х лучей, а также луча и отрезка.

Внешний угол треугольника ($\angle$ß)

$\angle$ß и $\angle 1$ – смежные
$\angle$ß $+ \angle 1 = 180°$



$\angle$ß $= \angle 2 + \angle 3$

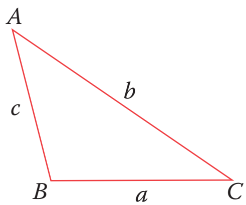


Соотношения между сторонами и углами треугольника

1) В любом $\triangle$–ке каждая сторона меньше суммы двух других ($b < a + c$)

2) Против меньшей стороны лежит меньший угол ($c < a \Rightarrow \angle C < \angle A$)

3) Против меньшего угла лежит меньшая сторона ($\angle C < \angle A \Rightarrow c < a$)



Что такое аксиома, теорема, обратная теорема и определение?

Аксиома – это утверждение, которое не вызывает сомнений, то есть принимается без доказательства.

Примеры аксиом.
1) Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.
2) Через любые две точки можно провести прямую и только одну
3) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости лишь одну прямую параллельную данной (аксиома параллельных прямых).

Теорема – это утверждение, правильность которого устанавливается путем рассуждения. Рассуждение называется доказательством. Формулировка теоремы состоит из двух частей. В одной части говорится, что дано (эта часть теоремы называется **условием**). В другой части говорится о том, что должно быть доказано. Эта часть называется **заключением** теоремы.

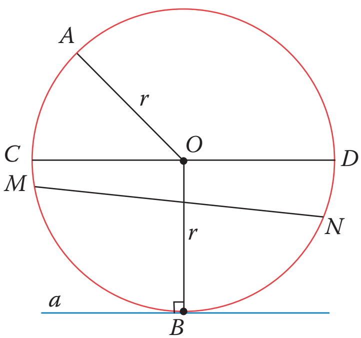
Пример теоремы. Если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны.
В этой теореме дано: $\triangle$ – равнобедренный (условие).
Надо доказать: углы при основании равны (заключение).

Обратная теорема. Ее можно получить, сделав заключение условием, а условие – заключением.
Вот обратная теорема теоремы вышеописанной: если в треугольнике два угла равны, то этот $\triangle$ – равнобедренный. Дано: $\triangle$, 2 угла в нем равны(условие).
Доказать: $\triangle$ – равнобедренный (заключение).

Определение. Это слово используется в геометрии наряду со словами аксиома и теорема. Дать определение чему-либо – это значит объяснить, что это такое.

Например, говорят: «Дайте определение окружности»
На это отвечают: «Окружностью называется линия на плоскости, все точки которой равноудалены от одной точки»

Окружность и круг



Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью.

O – центр окружности (круга)
AO – радиус окружности (круга)
CD – диаметр
MN – хорда
AC – дуга

Прямая а, имеющая с окружностью одну общую точку B, является касательной к окружности. В этом случае выполняется условие:
$a \perp OB$, где $OB = r$.

Построение циркулем и линейкой без масштабных делений

С помощью этих инструментов надо научиться решать хотя бы простейшие задачи:
1) построение угла, равного данному
2) построение биссектрисы угла
3) построение перпендикулярных прямых
4) построение середины отрезка
5) построение треугольника по трем элементам:
   а) по двум сторонам и углу между ними
   б) по стороне и двум прилежащим к ней углам
   в) по трем сторонам

Доказательство от противного

Часто при доказательстве теорем, в частности, если впрямую оно «не идет», используют способ, который называется доказательством от противного. Отправная точка рассуждений определила название этого способа. В начале рассуждений делают предположение (допущение), противное (противоположное) тому, что требуется доказать. Рассуждая на основании этого предположения, приходят к нелепому выводу (абсурду, противоречию). Значит, предположение было неверным, а верно то, что утверждается в теореме.

Докажите методом от противного теоремы:

1) Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то на пересекает и другую

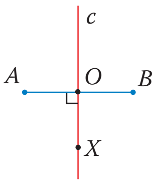
2) Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны

Геометрическое место точек (Г.М.Т.)

Г.М.Т. называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством

Некоторые примеры Г.М.Т.:
1) Окружность – г.м.т. на плоскости, равноудаленных от одной точки (центр окружности)

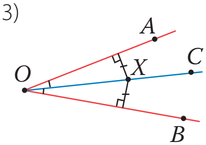
2)



$AO = OB$; $c \perp AB$;
CO – серединный перпендикуляр отрезка

Прямая c есть г.м.т., равноудаленных от концов отрезка AB

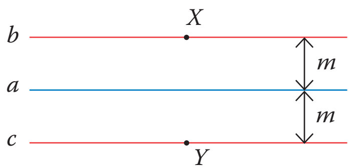
3)



$\angle AOC = \angle BOC$;
OC – биссектриса

OC есть г.м.т., равноудаленных от сторон угла

4)



Г.м.т., удаленных на данное расстояние от прямой, есть две параллельные ей прямые.

При доказательстве теорем и решении задач придерживаются определенной формы записи:

Дано: **Доказать** [найти или построить]: **Док-во** [решение или построение]:	**Рисунок** (чертеж)

Прежде чем доказывать теорему или решать задачу, надо выделить на рисунке равные элементы пометками или цветным фломастером. Эти пометки помогут увидеть на рисунке нужные признаки. Действия, которые вам придется делать при решении задачи (или доказательстве теоремы), следует обосновывать, то есть указывать на какой ранее изученный материал вы опираетесь.
Обозначение углов (отрезков) буквами позволяет составлять алгебраические уравнения, которые легко решаются.

Вся геометрия

8 класса в кратком изложении

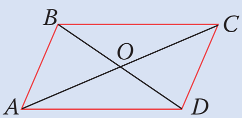
(к учебнику Л.С. Атанасяна и др.)

Памятка

СОДЕРЖАНИЕ

Параллелограмм и его виды

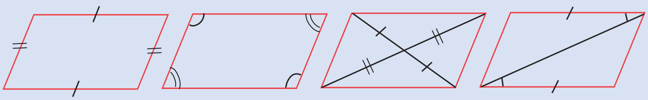
Параллелограмм



Определение

$$\frac{ABCD \text{ – четырехугольник}, \; AB \parallel CD, \; BC \parallel AD,}{ABCD \text{ – параллелограмм}}$$

Свойства



Признаки параллелограмма

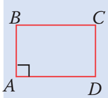
$ABCD$ – параллелограмм, если:

1) $AD \parallel = BC$ (1-ый признак)

2) $AD = BC$, $AB = DC$ (2-ой признак)

3) $AO = OC$; $BO = OD$ (3-ий признак)

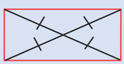
Прямоугольник



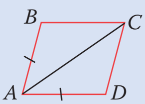
Определение

$$\frac{ABCD \text{ – параллелограмм}, \; \angle A = 90°,}{ABCD \text{ – прямоугольник}}$$

Свойства



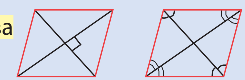
Ромб



Определение

$$\frac{ABCD \text{ – параллелограмм}, \; AB = AD,}{ABCD \text{ – ромб}}$$

Свойства



Признаки прямоугольника

$ABCD$ – прямоугольник, если:

$ABCD$ – параллелограмм и $AC = BD$

Признаки ромба

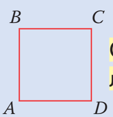
$ABCD$ – ромб, если:

1) $AB = BC = CD = AD$ (1-ый признак)

2) $ABCD$ – параллелограмм и $AC \perp BD$ (2-ой признак)

3) $ABCD$ – параллелограмм и AC – биссектриса $\angle A$ (3-ий признак)

Квадрат



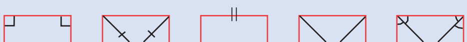
Определение

$$\frac{ABCD \text{ – прямоугольник}, \; AB = AD,}{ABCD \text{ – квадрат}}$$

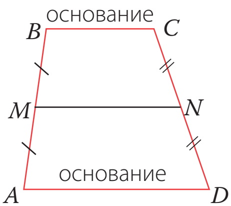
или

$$\frac{ABCD \text{ – ромб}, \; \angle A = 90°,}{ABCD \text{ – квадрат}}$$

Свойства



Трапеция. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника



$AD \parallel BC$; $AB \nparallel CD$

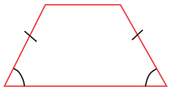
(по определению)

MN – средняя линия

$MN \parallel AD$

$MN = 1/2\,(AD + BC)$

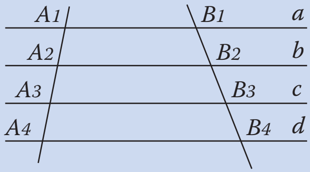
Виды трапеций



равнобедренная

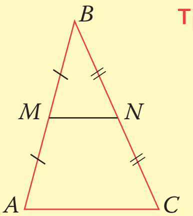
прямоугольная

Теорема Фалеса



Если $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ и $a \parallel b \parallel c \parallel d$, то $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

Средняя линия треугольника



MN – средняя линия $\triangle$

$(AM = MB;\ BN = NC)$

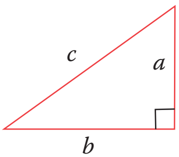
Свойства MN

1) $MN \parallel AC$

2) $MN = \frac{1}{2}AC$

Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

Теорема Пифагора

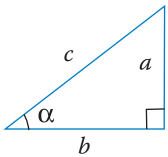


$c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$a^2 = c^2 - b^2$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$;

$b^2 = c^2 - a^2$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$;

Определение синуса, косинуса и тангенса острого угла и следствия из них

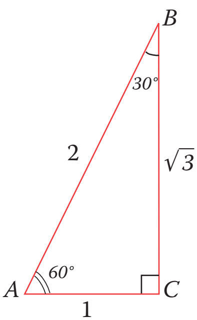


$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $a = c \cdot \sin\alpha$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$;

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $b = c \cdot \cos\alpha$, $c = \frac{b}{\cos\alpha}$;

$tg\,\alpha = \frac{a}{b}$, $a = b \cdot tg\,\alpha$, $b = \frac{a}{tg\,\alpha}$

Синус, косинус, тангенс углов 30°, 45°, 60°. Связь между sin α, cos α и tg α



Дано: $\triangle ABC$

$AB = 2$

$BC = \sqrt{3}$

$AC = 1$

Получаем, что:

$2^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$ – верно.

Следовательно $\triangle ABC$ – прямоугольный по обратной теореме теоремы Пифагора

$\sin 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$;

$tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $tg\,60° = \sqrt{3}$

Формулы приведения

1) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

2) $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

Связь между $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$

1) $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

основное тригонометрическое тождество

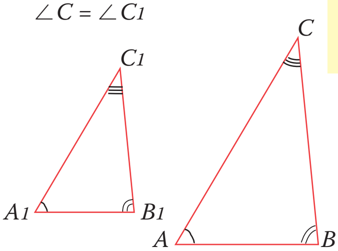
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Подобные треугольники

Определение

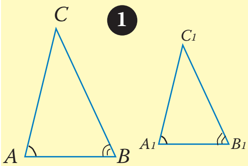
$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, если выполняются следующие условия:

1. $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1}$
2. $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$

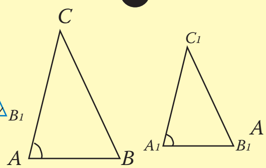


Признаки подобия треугольников

1

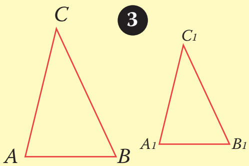


2



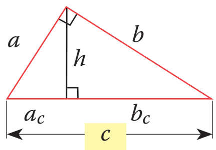
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

3



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

Теоремы о среднем пропорциональном

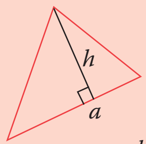


$h^2 = a_c\, b_c$, $h = \sqrt{a_c\, b_c}$;

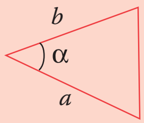
$a^2 = c\, a_c$, $a = \sqrt{c\, a_c}$;

$b^2 = c\, b_c$, $b = \sqrt{c\, b_c}$

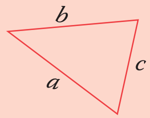
Формулы площадей



$$S = \frac{ah}{2}$$

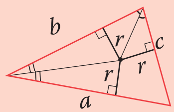


$$S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$$

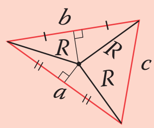


$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

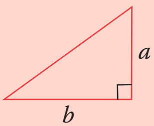
где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$



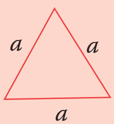
$$S = pr$$



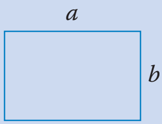
$$S = \frac{abc}{4R}$$



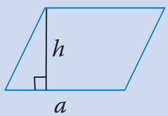
$$S = \frac{1}{2} ab$$



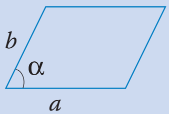
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



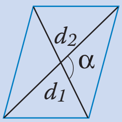
$$S = ab$$



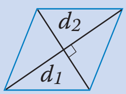
$$S = ah$$



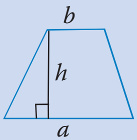
$$S = ab \sin\alpha$$



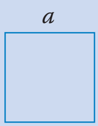
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$$



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

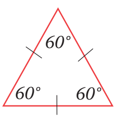


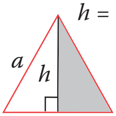
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



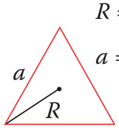
$$S = a^2$$

Правильные треугольники



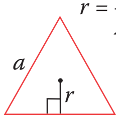


$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

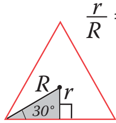


$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

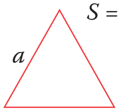
$$a = R\sqrt{3}$$



$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

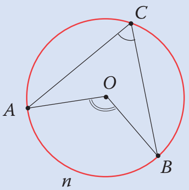


$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$



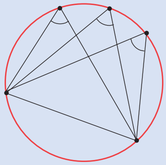
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

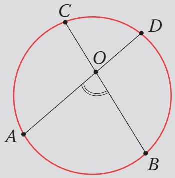
Углы в круге



$\angle AOB$ – центральный;
$\angle AOB = \smile AnB.$

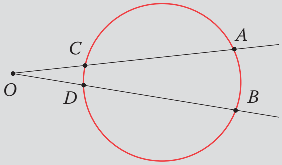
$\angle ACB$ – вписанный;
$\angle ACB = \frac{1}{2}\smile AnB.$



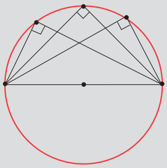


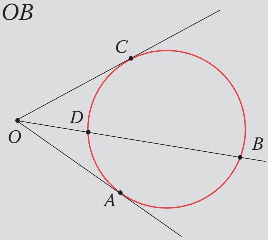
1. $\angle AOB = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{AB})$;

2. $AO \cdot OD = CO \cdot OB$

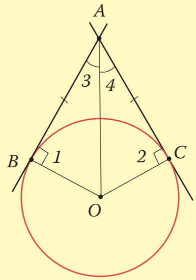


$\angle AOB = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AB} - \overset{\smile}{CD})$





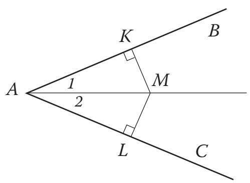
$\angle BOC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BC} - \overset{\smile}{DC})$
OC – касательная
OB – секущая
$OB \cdot OD = OC^2$



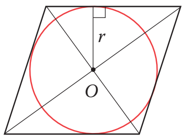
AB, AC – касательные.
Значит:
1) $AB = AC$;
2) $\triangle ABO$ и $\triangle ACO$ – прямоугольные;
3) $\angle 3 = \angle 4$

$C = 2\pi R$ – длина окружности;
$S = \pi R^2$ – площадь круга;
$\pi \approx 3{,}14159...$
R – радиус

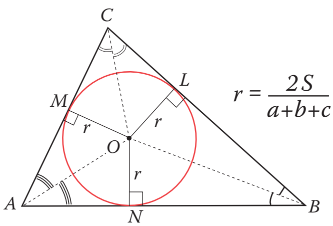
Вписанная и описанная окружности



Теорема. Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон. Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.



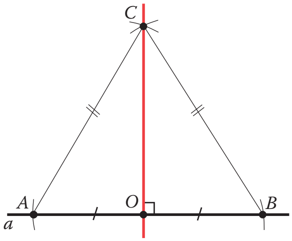
Вписанная окружность. Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется ***вписанной*** в многоугольник, а ***многоугольник – описанным*** около этой окружности.



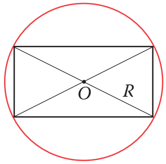
$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

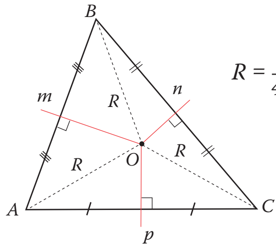
В любой треугольник можно вписать окружность.



Серединный перпендикуляр СО к отрезку АВ – это Г.М.Т., равноудаленных от концов отрезка АВ.



Описанная окружность. Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется ***описанной*** около многоугольника, а ***многоугольник*** – ***вписанным*** в эту окружность.



$$R = \frac{abc}{4S}$$

Значит: **центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины этих сторон.**

R описанной окружности $= AO = OC = OB$

Около любого треугольника можно описать окружность.

Центр описанной окружности около треугольника может быть расположен внутри него, вне его, на середине гипотенузы.

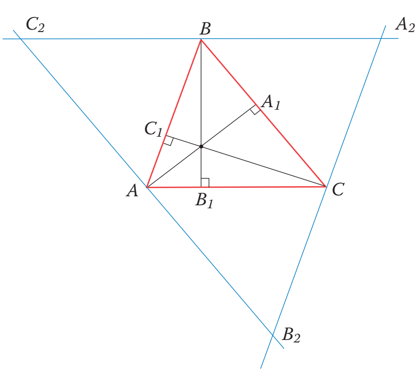
Четыре замечательные точки треугольника

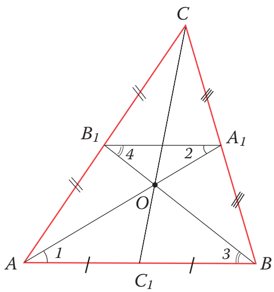
1. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

2. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

3. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

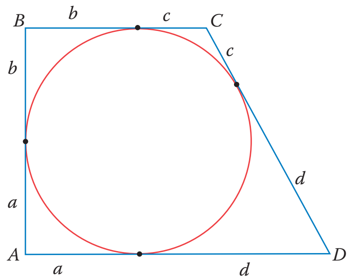
4. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1 , считая от вершины.



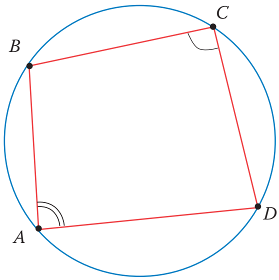


$AO : OA_1 = 2 : 1$

Условия существования вписанной и описанной окружностей около четырехугольника

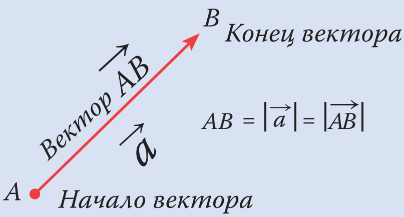


$AB + CD = AD + BC$



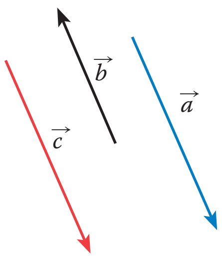
$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$

Векторы



$AB = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$

1. Вектором называется направленный отрезок.
2. Вектор характеризуется направлением и длиной.
3. Направление – множество сонаправленных лучей.
4. $|\vec{a}|$ – длина вектора.



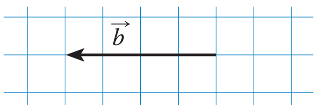
1. Коллинеарные векторы ($\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$)
2. Сонаправленные векторы $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$
3. Противоположно направленные векторы $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$
4. $\vec{a} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c} \\ |\vec{a}| = |\vec{c}| \end{cases}$

M • $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$

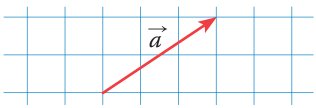
Имеет любое направление

5. От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

6.



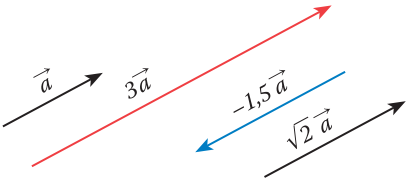
$|\vec{b}| = 4$

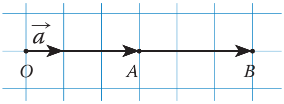


$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2}$

$|\vec{a}| = \sqrt{13}$

Умножение вектора на число





$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA} = 2(3\vec a)$

$\overrightarrow{OB} = 6\vec a = (2\cdot 3)\vec a$

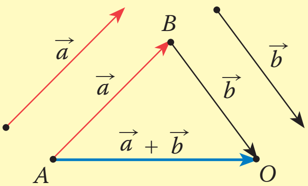
Свойства умножения :

1. $(kl)\,\vec a = k(l\,\vec a)$ (сочетательный закон)

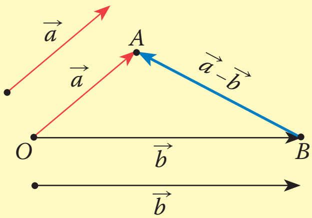
2. $(k + l)\,\vec a = k\,\vec a + l\,\vec a$
(первый распределительный закон)

3. $k\,(\vec a + \vec b) = k\,\vec a + k\vec b$
(второй распределительный закон)

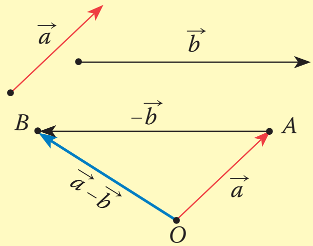
Сложение и вычитание векторов

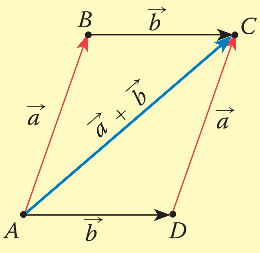


Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника.*



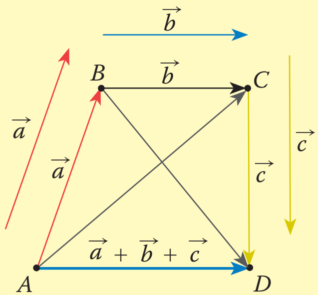
Проверка: $\vec b + (\vec a - \vec b) = \vec a$





$\overrightarrow{DB} = \vec a - \vec b$

Правило параллелограмма



Сумма нескольких векторов

Законы сложения векторов :

1. $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$
(переместительный)

2. $(\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c)$
(сочетательный)

3. $\vec a + \vec 0 = \vec a$

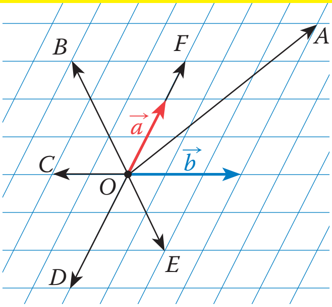
Вся геометрия
9 класса в кратком изложении

Памятка

(к учебнику Л.С. Атанасяна и др.)

СОДЕРЖАНИЕ

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{OB} = 1{,}5\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{OC} = 0 \cdot \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{OF} = 1{,}5\vec{a} - 0 \cdot \vec{b}$

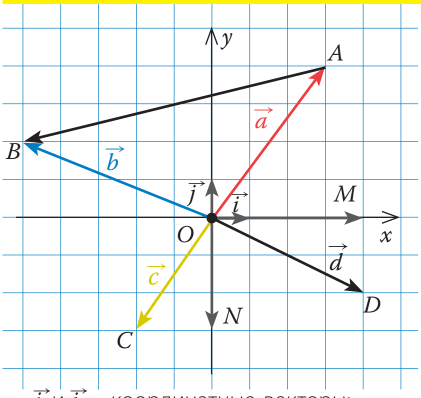
$\overrightarrow{OE} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$\vec{p}$ – любой вектор;

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – числа;

$\vec{p}$ разлагается единственным способом.

Декартовы координаты на плоскости



Координаты вектора	Разложение вектора	Длина вектора
$\vec{a}\{3;4\}$	$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$\vec{b}\{-5;2\}$	$\vec{b} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$	$\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{(-5)^2+2^2} = \sqrt{29}$
$\overrightarrow{ON}\{0;-3\}$	$\overrightarrow{ON} = -3\vec{j}$	$\lvert\overrightarrow{ON}\rvert = 3$
$\vec{d}\{4;-2\}$	$\vec{d} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$	$\lvert\vec{d}\rvert = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$
$\overrightarrow{OM}\{4;0\}$	$\overrightarrow{OM} = 4\vec{i}$	$\lvert\overrightarrow{OM}\rvert = 4$
$\overrightarrow{AB}\{-8;-2\}$	$\overrightarrow{AB} = -8\vec{i} - 2\vec{j}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{68}$
$\overrightarrow{CD}\{6;1\}$	$\overrightarrow{CD} = 6\vec{i} + \vec{j}$	$\lvert\overrightarrow{CD}\rvert = \sqrt{37}$

$\vec{i}$ и $\vec{j}$ – координатные векторы;

$\vec{a}\{x;y\}$: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$

Действия над векторами

$\vec{a}\{x_1 ; y_1\} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

$\vec{b}\{x_2 ; y_2\} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

---

1. $\vec{a} + \vec{b} = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j}$
2. $\vec{a} - \vec{b} = (x_1-x_2)\vec{i} + (y_1-y_2)\vec{j}$
3. $k\vec{a}\{kx_1 ; ky_1\}$, где k — число

Нахождение координат вектора $\overrightarrow{AB}$

Пусть O – начало координат,
$B\{x_2 ; y_2\}$, $A\{x_1 ; y_1\}$

Обозначим $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

Тогда $\overrightarrow{AB} = (\vec{b} - \vec{a})\{x_2 - x_1 ; y_2 - y_1\}$

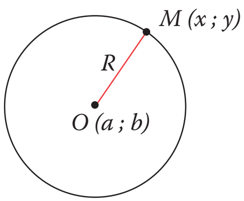
Расстояние между двумя точками

$A\{x_1 ; y_1\}$

$B\{x_2 ; y_2\}$

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Уравнение окружности



$OM = R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

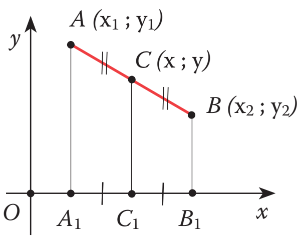
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

уравнение окружности с центром в точке $(a ; b)$ радиуса R

$x^2 + y^2 = R^2$

уравнение окружности с центром в начале координат $(0 ; 0)$ радиуса R

Координаты середины отрезка

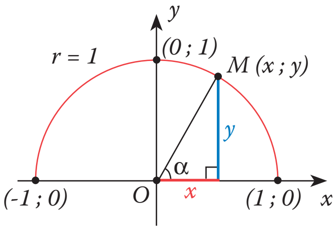


$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

по теореме Фалеса

Sin α, cos α, tg α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$



1. α – острый угол, тогда $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$; $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$; $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Получили формулы: $\sin\alpha = y$

$\cos\alpha = x$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

2. Определим значения *sin α, cos α, tg α* этими формулами для любого угла α, принадлежащего отрезку [0° ; 180°] :

$\sin 0° = 0$ $\cos 0° = 1$ $tg\, 0° = 0$	$\sin 90° = 1$ $\cos 90° = 0$ $tg\, 90°$ не имеет смысла	$\sin 180° = 0$ $\cos 180° = -1$ $tg\, 180° = 0$

3. Формулы приведения. (Постарайтесь доказать эти формулы, используя чертежи).

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

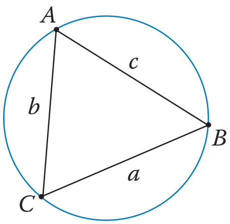
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

4. Полуокружность является дугой окружности $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выполняется для любого угла α, принадлежащего отрезку [0° ; 180°]

Эта формула называется основным тригонометрическим тождеством

Теорема синусов и косинусов



Теорема синусов:

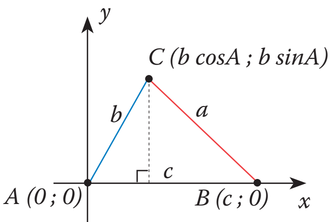
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Для доказательства использовать формулы:

$$S_\triangle = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \ldots,$$ а также задачу № 1033

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



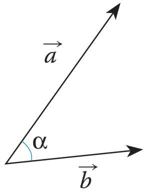
Доказательство

Запишем квадрат расстояния между точками B и C, координаты которых известны:

$$CB^2 = (b\cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 = b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A =$$

$$= b^2\underbrace{(\cos^2 A + \sin^2 A)}_{=1} + c^2 - 2bc\cos A,$$ ч.т.д.

Скалярное произведение векторов

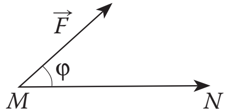


Определение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

1. $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$

Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$

Скалярное произведение векторов широко применяется в физике



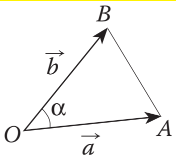
$\vec{F}$ – сила

$\overrightarrow{MN}$ – перемещение

A – работа

$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos\varphi$

Скалярное произведение векторов, заданных в координатах



$\vec{a}\{x_1 ; y_1\}$; $\vec{b}\{x_2 ; y_2\}$ Доказать: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

Доказательство

1. По теореме косинусов
$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA\cos\alpha$
2. $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\,\vec{b}\,\vec{a}$
3. $\overrightarrow{AB}\,\{x_2 - x_1 ; y_2 - y_1\}$; $|\overrightarrow{AB}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
$|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2$; $|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2$
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2\right) =$
$= x_1x_2 + y_1y_2$ *ч.т.д.*

Следствие 1

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

Следствие 2

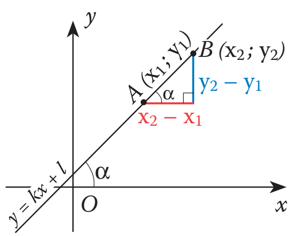
$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Свойства

1. $\vec{a}^{\,2} \geqslant 0$
2. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$
3. $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$
4. $(k\,\vec{a})\,\vec{b} = k\,(\vec{a}\,\vec{b})$

Уравнение прямой в общем виде $ax + by = c$, где a,b,c – числа

1 При $b \neq 0$; $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, *приняв* $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = l$, *получим* $y = kx + l$



Выясним геометрический смысл коэффициента k.

1. $tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
2. $\begin{cases} y_2 = kx_2 + l \\ y_1 = kx_1 + l \end{cases}$

$y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$k = tg\,\alpha$ – называется угловым коэффициентом

$k > 0$ (α – острый угол)

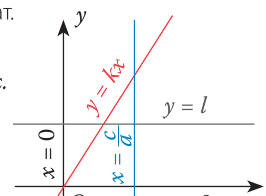
$k < 0$ (α – тупой угол)

l – ? ; $x = 0$, тогда $y = l$

$(0 ; l)$ – точка пересечения прямой $y = kx + l$ с осью *oy*.

Рассмотрим частные случаи:

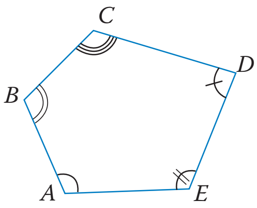
1. $b \neq 0$; $a \neq 0$; $c = 0$, тогда $y = kx$, график проходит через начало координат.
2. $b \neq 0$; $a = 0$; $c = 0$, тогда $y = 0$ – уравнение оси *ox*.
3. $b \neq 0$; $a = 0$; $c \neq 0$, тогда $y = l$ – уравнение прямой, параллельной оси *ox*.



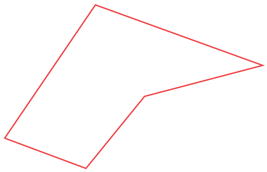
2 $b = 0$; $a \neq 0$; $c \neq 0$; $x = \frac{c}{a}$ – уравнение прямой, параллельной оси *oy*

$b = 0$; $a \neq 0$; $c = 0$; $x = 0$ – уравнение оси *oy*

Многоугольники. Длина окружности. Площадь круга



Выпуклый



Невыпуклый

$C = 2\pi R$ – длина окружности;

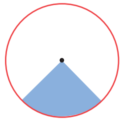
π – число иррациональное;

$\pi \approx 3{,}14 ; \pi \approx \frac{22}{7}$

$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$ – длина дуги;

$S = \pi R^2$ – площадь круга;

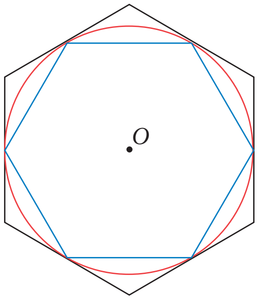
$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$ – площадь сектора



1. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ(n-2)$

2. Сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°

Формулы для правильного многоугольника

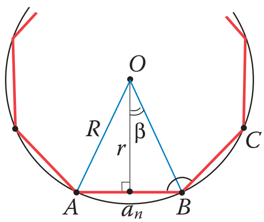


В правильном многоугольнике:

1. Все стороны и углы равны.
2. Точка O – центр вписанной и описанной окружности.
3. Правильные выпуклые n-угольники подобны $\Rightarrow$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} = k$ (число) ; $\frac{S_1}{S_2} = k^2$

коэффициент подобия



$\angle ABC = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ – внутренний угол n-угольника

$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ – центральный угол n-угольника

$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$

$r = R \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$

$S = \frac{1}{2}\rho_n \cdot r$

$a_6 = R$	$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$a_6 = \frac{2\sqrt{3}\,r}{3}$	$S_6 = \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2}$
$a_4 = R\sqrt{2}$	$r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$a_4 = 2r$	$S_4 = a^2$
$a_3 = R\sqrt{3}$	$r = \frac{1}{2}R$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$	$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Движение

Определение

Движение – отображение плоскости на себя, при котором сохраняются расстояния между точками.

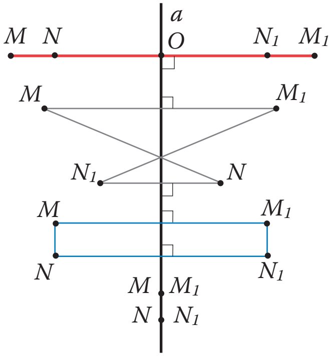
Свойства движений

1. Прямая отображается на прямую, луч – на луч, отрезок – на отрезок.
2. Отрезок отображается на равный отрезок, угол – на равный угол, треугольник – на равный ему треугольник.

Примеры движения

1. Осевая симметрия
2. Центральная симметрия
3. Параллельный перенос
4. Поворот

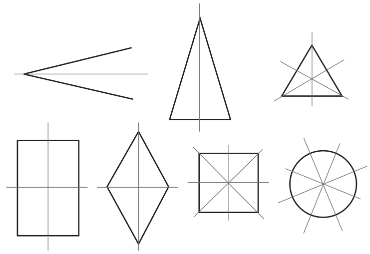
ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ (Обозначим Sa)



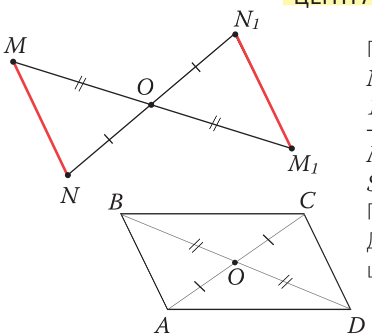
По определению
$M_1 = Sa\,(M)$, так как :
$1)\ MM_1 \perp a\ ;\ 2)\ MO = OM_1$

$M_1N_1 = Sa\,(MN)$
$Sa\,(M\,NN_1M_1) = M_1N_1NM$
Получили ту же фигуру.
В таком случае говорят, что фигура имеет осевую симметрию.

Фигуры, обладающие осевой симметрией



ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ (Обозначим So)



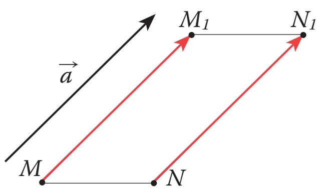
По определению
$N_1 = So\,(N)$, так как :
$1)\ O \in NN_1\ ;\ 2)\ NO = ON_1$

$M_1N_1 = So\,(MN)$
$So\,(ABCD) = CDAB$
Получили ту же фигуру.
Данная фигура обладает центральной симметрией.

Фигуры, обладающие центральной симметрией

Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются окружность и параллелограмм. Прямая также обладает центральной симметрией, только в отличии от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии, у прямой их бесконечно много.

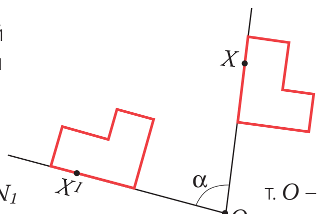
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС



Параллельный перенос задан вектором $\vec{a}$

$\vec{a}\,(M) = M_1$;
$\vec{a}\,(N) = N_1$;
$\vec{a}\,(MN) = M_1N_1$

ПОВОРОТ



Поворот задан центром и углом поворота

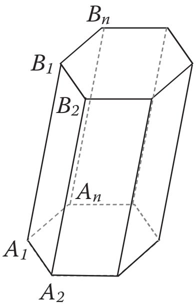
$X \rightarrow X^1$, если $OX^1 = OX$

$\angle X^1OX = \alpha$

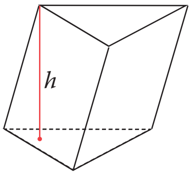
т. O – центр

Многогранники

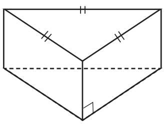
Призма



Многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ – основания призмы. Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1, \ldots,$ $A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани.



наклонная призма
h – высота

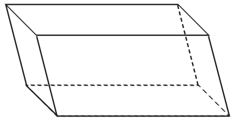


правильная
треугольная призма

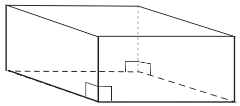
1. $S_{бок}$ равна сумме площадей боковых граней.

2. $S_{полн} = S_{бок} + 2\,S_{осн}$; 3. $V = S_{осн} \cdot h$

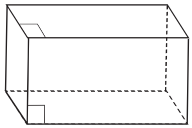
Параллелепипед



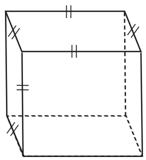
наклонный



прямой

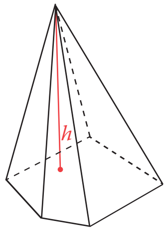


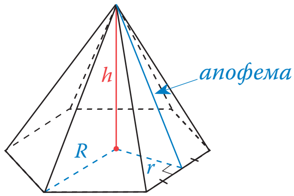
прямоугольный



куб

Пирамида





Правильная пирамида

Основание – правильный многоугольник. Вершина проектируется в его центр.

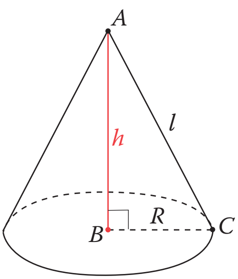
1. $S_{бок}$ равна сумме площадей боковых граней.

2. $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

3. $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$

Тела вращения

Конус

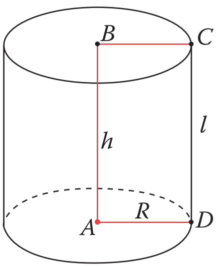


Конус получен вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB.

$$S_{бок} = \pi R l$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$$

Цилиндр

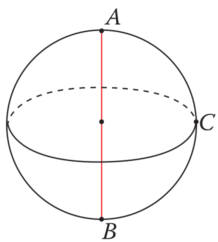


Цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB.

$$S_{бок} = 2\pi R l$$

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

Шар



Шар получен вращением полукруга ACB вокруг диаметра AB.

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$