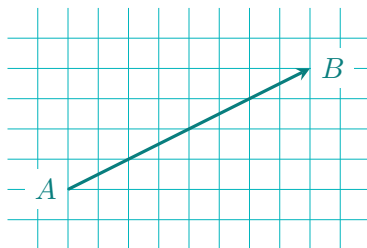
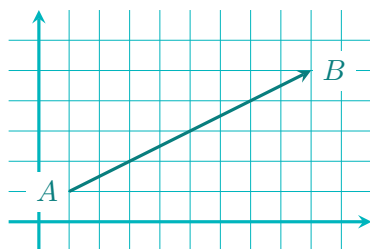


Векторы

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая - концом, называется направленным отрезком или **вектором**.



Координаты вектора. Если точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ соответственно являются началом и концом вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ равны соответственно первой и второй координатам вектора $\vec{a}$.



$$\begin{aligned} A(1; 1), B(9; 5) \\ \vec{AB} \{9 - 1; 5 - 1\} \\ \vec{AB} \{8; 4\} \end{aligned}$$

Модуль или длина вектора. Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{a_1; a_2\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

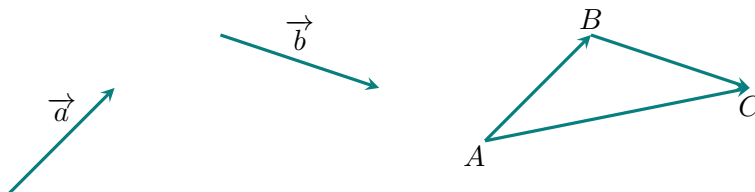
$$\begin{aligned} \vec{AB} \{8; 4\} \\ |\vec{AB}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Координаты суммы векторов. Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $\{a_1; a_2\}$ и $\{b_1; b_2\}$, то координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $\{a_1 + b_1; a_2 + b_2\}$.

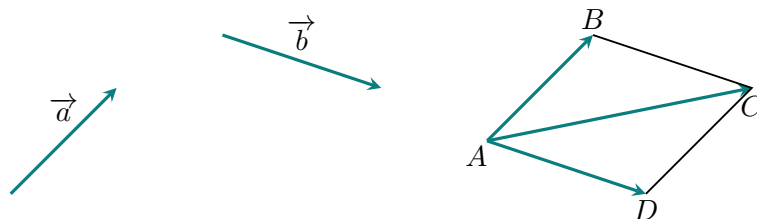
$$\begin{aligned} \vec{AB} \{8; 4\}, \vec{KL} \{3; 5\} \\ \vec{AB} + \vec{KL} = \{8 + 3; 4 + 5\} = \{11; 9\} \end{aligned}$$

Правила сложения двух векторов.

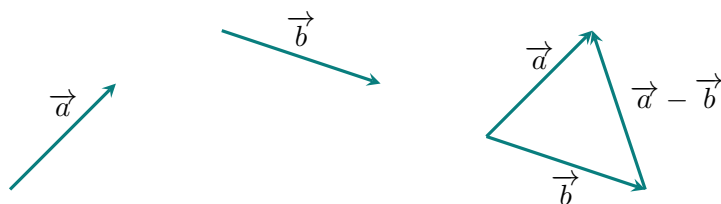
Правило треугольника. Отложим от произвольной точки A вектор $\vec{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B отложим вектор $\vec{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\vec{AC}$ называют суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и записывают $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$.



Правило параллелограмма. Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$. Тогда искомая сумма $\vec{a} + \vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$.



Разность векторов. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.



Координаты разности векторов. Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \{8; 4\}, \overrightarrow{KL} \{3; 5\} \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{KL} = \{8 - 3; 4 - 5\} = \{5; -1\} \end{aligned}$$

Умножение вектора на число. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k , отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1. $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$ (т.е. длина нового вектора будет в $|k|$ раз больше);
2. если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow \vec{a}$ (сонаправленные); если $k < 0$, то $\vec{b} \downarrow \vec{a}$ (противоположно направленные).

Координаты умноженного вектора. Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1; ka_2)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \{8; 4\} \\ 3\overrightarrow{AB} = \{3 \cdot 8; 3 \cdot 4\} = \{24; 12\} \end{aligned}$$

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| = 6\sqrt{3}, |\overrightarrow{KL}| = 6\sqrt{3}, \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{KL}) = 60^\circ \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL} = 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 54 \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов $a(a_1; a_2)$ и $b(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \{8; 4\}, \overrightarrow{KL} \{3; 5\} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL} = \{8 \cdot 3; 4 \cdot 5\} = \{24; 20\} \end{aligned}$$

Условие перпендикулярности двух векторов. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\text{Если } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ то } \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

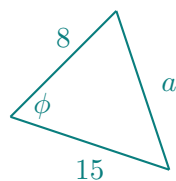
Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ можно вычислить по формуле:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$\cos \angle(\vec{AB}, \vec{KL}) = \frac{\vec{AB} \{8; 4\}, \vec{KL} \{3; 5\}}{\sqrt{8^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{44}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{34}} = \frac{44}{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{34}} = \frac{11}{\sqrt{170}}$$

Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle(b, c)$$



$$\cos \phi = 0,3$$

$$a^2 = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 0,3$$

$$a^2 = 289 - 72$$

$$a = \sqrt{217}$$