

Подготовка к ОГЭ-2025
по математике. Алгебраические
задачи с развёрнутым ответом.

- 20. Алгебраические выражения,
уравнения, неравенства и их системы
- 21. Текстовая задача на движение,
совместную работу, смеси
- 22. Задание с параметром, построение
графика

Алгебра, повышенный уровень: книга



Подготовительные задания

- ▶ Действия со степенями (20)
- ▶ Разложение многочленов на множители, формулы сокращённого умножения (20, 22)
- ▶ Проценты и части (21)
- ▶ Область допустимых значений выражения (22, 20)
- ▶ Свойства арифметического корня (20, 22)
- ▶ Уравнения и системы уравнений (20, 21)
- ▶ Свойства неравенств (20, 21)
- ▶ Графики: прямая, парабола, гипербола (22)
- ▶ Модуль, его свойства и график (22)
- ▶ Средняя скорость, движение по реке (21)

Задание 20. Пример 1 (начало)

Задача 1. Сократите дробь

$$\frac{5^{n-1} + 5^{n+2}}{6 \cdot 5^n}.$$

Решение.

$$\frac{5^{n-1} + 5^{n+2}}{6 \cdot 5^n} = \frac{5^n \cdot 5^{-1} + 5^n \cdot 5^2}{6 \cdot 5^n} =$$

$$= \frac{5^n \cdot (5^{-1} + 5^2)}{6 \cdot 5^n} = \frac{\frac{1}{5} + 25}{6} = \frac{25,2}{6} = 4,2.$$

Ответ. 4,2.

Задание 20. Пример 1 (продолжение)

Задача 1. Сократите дробь $\frac{5^{n-1} + 5^{n+2}}{6 \cdot 5^n}$.

$$\frac{5^{n-1} + 5^{n+2}}{6 \cdot 5^n} = \frac{5^n \cdot 5^{-1} + 5^n \cdot 5^2}{6 \cdot 5^n} =$$

$$= \frac{\cancel{5^n} (5^{-1} + 5^2)}{6 \cdot \cancel{5^n}} = \frac{5^{-1} + 5^2}{6} =$$

$$= \frac{5 + 25}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Комментарий. За выполненное решение выставляется 1 балл, так как была допущена одна описка, ответ получен неправильный.

Задание 20. Пример 1 (окончание)

Задача 1. Сократите дробь $\frac{5^{n-1} + 5^{n+2}}{6 \cdot 5^n}$.

$$\frac{5^{n-1} + 5^{n+2}}{6 \cdot 5^n} = \frac{5^{n-1+n+2}}{6 \cdot 5^n} = \frac{5^{2n+1}}{6 \cdot 5^n} = \frac{5^{n+1}}{30} = \frac{n+1}{6}$$

Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как были допущены ошибки в действиях со степенями.

Задание 20. Пример 2

Задача 2. Известно, что $f(x) = \left(7x - \frac{4}{x}\right)\left(4x - \frac{7}{x}\right)$.

Найдите значение выражения $\frac{f(t)}{f\left(\frac{1}{t}\right)}$.

Решение.

$$f(t) = \left(7t - \frac{4}{t}\right)\left(4t - \frac{7}{t}\right), \quad f\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{7}{t} - 4t\right)\left(\frac{4}{t} - 7t\right),$$

тогда

$$\frac{f(t)}{f\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{\left(7t - \frac{4}{t}\right)\left(4t - \frac{7}{t}\right)}{\left(\frac{7}{t} - 4t\right)\left(\frac{4}{t} - 7t\right)} = \frac{-\left(\frac{4}{t} - 7t\right)\left(4t - \frac{7}{t}\right)}{-\left(4t - \frac{7}{t}\right)\left(\frac{4}{t} - 7t\right)} = 1.$$

Задание 20. Пример 3

Задача 3. Найдите значение выражения

$$\frac{49x - 81y}{7\sqrt{x} + 9\sqrt{y}} + 2\sqrt{y} \text{ при } \sqrt{x} - \sqrt{y} = 14.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{49x - 81y}{7\sqrt{x} + 9\sqrt{y}} + 2\sqrt{y} = \\ &= \frac{(7\sqrt{x} - 9\sqrt{y})(7\sqrt{x} + 9\sqrt{y})}{7\sqrt{x} + 9\sqrt{y}} + 2\sqrt{y} = \\ &= 7\sqrt{x} - 9\sqrt{y} + 2\sqrt{y} = 7\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = \\ &= 7(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 98. \end{aligned}$$

Задание 20. Пример 4 (начало)

Задача 4. Решите уравнение

$$(x - 4)^2(x + 10) = 15(x - 4).$$

Решение.

$(x - 4)^2(x + 10) - 15(x - 4) = 0$. Вынесем за скобку общий множитель $(x - 4)$.

$$(x - 4)((x - 4)(x + 10) - 15) = 0,$$

$$(x - 4)(x^2 - 4x + 10x - 40 - 15) = 0,$$

$$(x - 4)(x^2 + 6x - 55) = 0.$$

Если $x - 4 = 0$, то $x = 4$; если $x^2 + 6x - 55 = 0$, то $D = 6^2 + 4 \cdot 55 = 256 = 16^2$,

$$x_1 = \frac{-6 - 16}{2} = -11; \quad x_2 = \frac{-6 + 16}{2} = 5.$$

Ответ: -11 ; 4 ; 5 .

Задание 20. Пример 4 (продолжение)

Задача 4. Решите уравнение

$$(x - 4)^2(x + 10) = 15(x - 4).$$

$$(x-4)^2(x+10)=15(x-4) \quad x-4=0$$

$$(x-4)(x+10)=15 \quad x=4$$

$$x^2 - 4x - 4 \cdot 10 + 10x = 15$$

$$x^2 + 6x - 40 - 15 = 0$$

$$x^2 + 6x - 55 = 0$$

$$6 - 4 \cdot (-55) = 36 + 220 = 256 = 16^2$$

$$x_1 = \frac{-6 - 16}{2} = -11$$

$$x_2 = \frac{-6 + 16}{2} = 5. \quad \text{Отв: } 4, -11, 5$$

Комментарий. За верно выполненное решение можно выставить 2 балла, несмотря на опisku (6 вместо 6^2).

Задание 20. Пример 4 (окончание)

Задача 4. Решите уравнение $(x - 4)^2(x + 10) = 15(x - 4)$.

$$(x - 4)^2(x + 10) = 15(x - 4)$$

$$(x - 4)(x + 10) = 15$$

$$x^2 - 4x - 4 \cdot 10 + 10x = 15$$

$$x^2 + 6x - 40 - 15 = 0$$

$$x^2 + 6x - 55 = 0$$

$$6 - 4 \cdot (-55) = 36 + 220 = 256$$

$$\frac{-6 - 16}{2} = -11 \quad \frac{-6 + 16}{2} = 5$$

Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как ход решения неверный (при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную, был потерян корень).

Задание 20. Пример 5 (начало)

Задача 5. Решите уравнение
$$x^2 + \sqrt{3 - 2x} = 3x + \sqrt{3 - 2x} + 10.$$

Решение.

Найдём область допустимых значений уравнения: $3 - 2x \geq 0$, $x \leq 1,5$.

Упростим уравнение: $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Тогда $x_1 = -2$, $x_2 = 5$.

С учётом ОДЗ, $x = -2$ — корень уравнения.

Ответ: -2 .

Задание 20. Пример 5 (продолжение)

Задача 5. Решите уравнение

$$x^2 + \sqrt{3 - 2x} = 3x + \sqrt{3 - 2x} + 10.$$

$$x^2 + \sqrt{3 - 2x} = 3x + \sqrt{3 - 2x} + 10,$$

$$x^2 - 3x - 10,$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -2.$$

Ответ: 5, -2.

Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как не учитывается область допустимых значений уравнения.

Задание 20. Пример 5 (окончание)

Задача 5. $x^2 + \sqrt{3-2x} = 3x + \sqrt{3-2x} + 10$.

$$x^2 + \sqrt{3-2x} = 3x + \sqrt{3-2x} + 10$$

$$\text{ОДЗ: } 3-2x \geq 0, \quad x \leq \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2 \cdot 1}$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{3 + 7}{2} = 5, \quad 5 \not\leq \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - 7}{2} = -2, \quad -2 \leq \frac{3}{2}$$

Отв. -2

Комментарий. При решении квадратного уравнения допущена ошибка (ученик не извлёк корень из дискриминанта, но общая формула написана верно). Вычислительная ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно. Выставляется 1 балл.

Задание 20. Пример 6

Задача 6. Решите уравнение $(2x + 24)^2 = x^4$.

Решение.

$x^4 - (2x + 24)^2 = 0$. Разложим на множители, используя формулу разности квадратов:

$$(x^2)^2 - (2x + 24)^2 = 0,$$

$$(x^2 - (2x + 24))(x^2 + (2x + 24)) = 0,$$

$$(x^2 - 2x - 24)(x^2 + 2x + 24) = 0.$$

Произведение будет равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю:

$x^2 + 2x + 24 = 0$, действительных корней нет.

$x^2 - 2x - 24 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = -4$.

Ответ: $-4; 6$.

Задание 20. Пример 7

Задача 7.
$$\begin{cases} (x - 3y)^2 = 4x, \\ (x - 3y)^2 = 4y. \end{cases}$$

Решение. Заменим одно из уравнений системы на разность уравнений. Получим:

$$\begin{cases} (x - 3y)^2 = 4x, \\ 4x = 4y; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 3y)^2 = 4x, \\ x = y; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = y, \\ (-2x)^2 = 4x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ 4x(x - 1) = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = y, \\ x = 0, x = 1. \end{cases}$$

Решения системы: $(0; 0)$, $(1; 1)$.

Ответ: $(0; 0)$, $(1; 1)$.

Задание 20. Пример 8 (начало)

Задача 8. Решите неравенство

$$\frac{-14}{(x-7)^2-5} \geq 0.$$

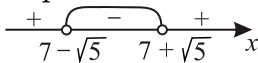
Решение. $(x-7)^2-5 < 0$, $x^2-14x+44 < 0$.

Найдём нули левой части.

$$x^2-14x+44=0, \quad x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{20}}{2} = 7 \pm \sqrt{5},$$

$$x_1 = 7 - \sqrt{5}, \quad x_2 = 7 + \sqrt{5}.$$

На рисунке изображены знаки левой части неравенства.



Решение неравенства: $(7 - \sqrt{5}; 7 + \sqrt{5})$.

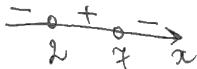
Задание 20. Пример 8 (окончание)

Задача 8. $\frac{-14}{(x-7)^2-5} \geq 0.$

$$\frac{-14}{(x-7)^2-5} \geq 0, (x-7)^2-5 \neq 0$$

$$(x-7)^2 \neq 5, x-7 \neq \pm\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{ll} x-7 \neq 5 & x-7 \neq -5 \\ x \neq 12 & x \neq 2 \end{array}$$



$$2 < x < 7$$

$$\text{Отв: } 2 < x < 7.$$

Комментарий.

За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как была допущена одна вычислительная ошибка (забыли извлечь корень при нахождении корней уравнения) и описка при переносе чисел на ось, ход решения верный, но ответ получен неправильный.

Задание 20. Пример 9

Задача 9.
$$\begin{cases} \frac{5-3x}{1+(2-x)^2} \leq 0, \\ 1-2x \geq 4(2x-5). \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы.

Знаменатель дроби положителен при любом значении x , поэтому первое неравенство равносильно неравенству

$$5-3x \leq 0, \text{ то есть } -3x \leq -5, x \geq \frac{5}{3}.$$

Решим второе неравенство системы.

$$1-2x \geq 4(2x-5),$$

$$1-2x \geq 8x-20, -10x \geq -21, x \leq 2,1.$$

Решим систему
$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{3}, \\ x \leq 2,1. \end{cases}$$

Получаем: $\left[1\frac{2}{3}; 2,1\right]$.

Задание 21. Пример 10 (начало)

Задача 10. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют электропоезд и товарный поезд, скорости которых равны соответственно 55 км/ч и 25 км/ч. Длина товарного поезда равна 1600 метрам. Найдите длину электропоезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 4,5 минуты.

Решение. Относительная скорость поездов равна $55 - 25 = 30$ км/ч = 30 000 м/ч. За 4,5 минуты, то есть $\frac{4,5}{60} = \frac{3}{40}$ ч, поезд относительно электрички проедет

$30\,000 \cdot \frac{3}{40} = 2250$ м, это расстояние составляет

суммарную длину поездов. Длина пассажирского поезда равна $2250 - 1600 = 650$ м.

Ответ: 650 м.

Задание 21. Пример 10 (окончание)

Задача 10.

$$\begin{array}{l} 55 \text{ км/ч} - \text{элек.} \\ 1 \text{ } \underline{\hspace{2cm}} \\ 2 \text{ } \underline{25 \text{ км/ч} - \text{товар}} \\ 1600 \text{ м} \end{array}$$

$$1) 55 \text{ км/ч} \cdot 4,5 \text{ минуты} =$$

$$= 55 \text{ км/ч} \cdot 0,075 = 4125 \text{ метров}$$

$$2) 1600 \text{ м} + 4125 \text{ м} = 5725 \text{ метров}$$

Ответ: 5725 метров

Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как ход решения неверный, ответ получен неправильный.

Задание 21. Пример 11

Задача 11. Первые 270 км товарный поезд ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 40 км/ч, а последние 125 км — со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда на протяжении всего пути.

Решение. Средняя скорость поезда на протяжении всего пути равна отношению пройденного пути к затраченному времени.

Поезд проехал путь $270 + 120 + 125 = 515$ километров за время $\frac{270}{60} + \frac{120}{40} + \frac{125}{50} = 10$ часов.

Средняя скорость равна $515 : 10 = 51,5$ км/ч.

Ответ: 51,5 км/ч.

Задание 21. Пример 12

Задача 12. Два автомобиля одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы. Спустя 45 мин автомобиль, который двигался со скоростью 85 км/ч, впервые догнал второй автомобиль. Найдите скорость второго автомобиля, если известно, что длина круговой трассы равна 21 км.

Решение. За 45 минут (то есть $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ часа) первый

автомобиль проедет $85 \cdot \frac{3}{4} = 63,75$ км.

Второй автомобиль за это время проедет на круг, то есть на 21 км, меньше. Значит, пройденное вторым автомобилем расстояние равно $63,75 - 21 = 42,75$ км.

Скорость второго автомобиля равна $42,75 : \frac{3}{4} = 57$ км/ч.

Задание 21. Пример 13 (начало)

Задача 13. Моторная лодка прошла против течения реки 48 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

Решение. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x км/ч.

По течению: $\frac{48}{x+3}$ ч. Против течения: $\frac{48}{x-3}$ ч.

$$\frac{48}{x-3} - \frac{48}{x+3} = 4, \quad \frac{12}{x-3} - \frac{12}{x+3} = 1,$$

$$\frac{72}{(x-3)(x+3)} = 1, \quad x^2 = 81, \quad x_1 = -9, \quad x_2 = 9.$$

Выбираем значение, превышающее скорость течения.

Скорость лодки в неподвижной воде равна 9 км/ч.

Задание 21. Пример 13 (продолжение)

x - скорость

$$\frac{48}{x+3} - \frac{48}{x-3} = 4$$

$$x \neq \pm 3$$

$$\begin{array}{r} x \cdot 48 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{48(x-3) - 48(x+3)}{(x+3)(x-3)} &= \frac{4(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} \\ \frac{-144 + 48x - 48x - 144}{(x+3)(x-3)} &= \frac{4(x^2 - 9)}{(x-3)(x+3)} \\ \frac{-288}{(x+3)(x-3)} &= \frac{4(x^2 - 9)}{(x-3)(x+3)} \end{aligned}$$

$$288 = 4x^2 - 36$$

$$4x^2 = 324$$

$$x^2 = 81$$

$$x = 9 \quad x = -9 \text{ - не подходит}$$

ответ: 9 км/ч .

Задание 21. Пример 13 (окончание)

Комментарий. Интересное решение. Ответ получен правильный. Отсутствие числа 3 в скобках в последнем дробно-рациональном уравнении можно считать за опisku, не приводящую к ошибочному ответу. Но при проверке обнаруживаются две ошибки:

- 1) при составлении уравнения вычитается из меньшего большее, при этом получен положительный ответ;
- 2) при приведении подобных слагаемых потерял знак «минус» у числа 288.

Сделаны две ошибки, нужно выставять 0 баллов.

Задание 21. Пример 14

Задача 14. Три девочки написали за день вместе 350 сообщений. Известно, что первая девочка написала в 3 раза больше сообщений, чем вторая, и на 42 сообщения больше, чем третья. На сколько сообщений меньше написала вторая девочка, чем третья?

Решение. Примем число сообщений, написанных за день второй девочкой, за x . Тогда первая девочка написала $3x$ сообщений, а третья — на 42 сообщения меньше, то есть $(3x - 42)$.

Втроем девочки написали $x + 3x + 3x - 42 = 7x - 42$ сообщения, что по условию равно 350.

Из уравнения $7x - 42 = 350$ легко найти $x = 56$.

Вторая написала 56 сообщений, а третья

$3x - 42 = 3 \cdot 56 - 42 = 126$ сообщений, разность равна 70.

Задание 21. Пример 15

Задача 15. Свежие фрукты содержат 75 % воды, а высушенные — 15 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 6 кг высушенных фруктов?

Решение. Предположим, что фрукты состоят из воды и «сухого остатка». В свежих фруктах $100 \% - 75 \% = 25 \%$ «сухого остатка», в сушёных — $100 \% - 15 \% = 85 \%$ «сухого остатка». В 6 кг сушёных фруктов содержится $6 \cdot 0,85 = 5,1$ кг «сухого остатка». В свежих, из которых приготовили сушёные, этого остатка было столько же, но в процентах это составляет уже 25 %.

Если 5,1 кг — это 25 %, то 100 % это

$$5,1 : 25 \cdot 100 = 20,4 \text{ кг.}$$

Задание 21. Пример 16 (начало)

Задача 16. Имеется два сосуда, содержащих 30 кг и 42 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 40 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 37 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

Задание 21. Пример 16 (продолжение)

Задача 16. 1-й: 30 кг, 2-й: 42 кг. Смесь: 40 % кислоты.
Смесь равных масс: 37 %. Кислоты во 2-м — ? (кг)

Решение. В первом сосуде x кг, а во втором — y кг.

Если их слить вместе, то получим раствор массой
 $30 + 42 = 72$ кг, содержащий 40 %, то есть $72 \cdot 0,4 = 28,8$
кг кислоты. Значит, $x + y = 28,8$.

Концентрации: 1) $\frac{x}{30} = \frac{100x}{30} \%$, 2) $\frac{y}{42} = \frac{100y}{42} \%$.

Сольём вместе по 30 литров каждого раствора. Будет
 $60 \cdot 0,37 = 22,2$ кг кислоты, при этом в первом растворе

кислоты было x кг, а во втором $30 \cdot \frac{y}{42} = \frac{5}{7}y$ кг.

Получаем: $x + \frac{5}{7}y = 22,2$.
$$\begin{cases} x + y = 28,8, \\ x + \frac{5}{7}y = 22,2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 23,1, \\ x = 5,7. \end{cases}$$

Во втором растворе содержится 23,1 кг кислоты.

Задание 22. Типы

Можно условно разбить все задачи 23 на два типа:

- ▶ требуется построить график и затем найти значения параметра;
- ▶ требуется найти значения параметра и затем построить график.

В свою очередь, задания на построение графика тоже можно разбить на несколько групп:

- ▶ построить график дробно-рациональной функции;
- ▶ построить график кусочно-заданной функции;
- ▶ построить график функции, содержащей модуль.

Задание 22. Пример 17 (начало)

Задача 17. Постройте график функции

$$y = -2 - \frac{(x+4)}{(x^2+4x)} \text{ и определите, при каких значениях}$$

m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

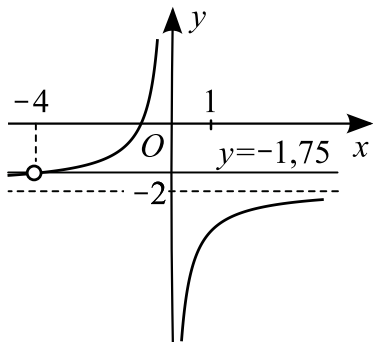
Решение. Преобразуем уравнение функции, разложив на множители числитель и знаменатель дроби.

$$-2 - \frac{(x+4)}{(x^2+4x)} = -2 - \frac{(x+4)}{x(x+4)} = -2 - \frac{1}{x}, \text{ значит,}$$

$$y = -2 - \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq -4 \text{ и } x \neq 0.$$

Если $x = -4$, то функция не определена. Заметим, что при $x = -4$ выполняется $-2 - \frac{1}{x} = -2 - \frac{1}{-4} = -1,75$.

Задание 22. Пример 17 (продолжение)



Графиком заданной функции является гипербола $y = -\frac{1}{x}$, сдвинутая на 2 единицы вниз, с выколотой точкой $(-4; -1,75)$.

Прямая $y = m$ — горизонтальная прямая, пересекающая ось ординат в точке $(0; m)$. Она не имеет с графиком общих точек при $m = -2$ и $m = -1,75$.

Задание 22. Пример 17 (окончание)

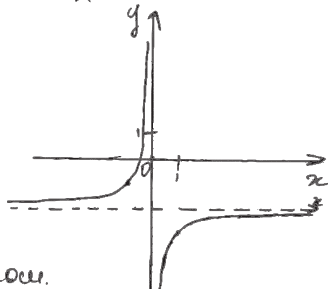
$$y = -2 - \frac{x+4}{x^2+4x} = -2 - \frac{x+4}{x(x+4)} = -2 - \frac{1}{x}$$

график получается

смещением графика

функции $y = -\frac{1}{x}$ на 2 ед.
вниз вдоль оси ординат.

При $y = -2$ прямая не будет
иметь общих точек с графиком.



Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как график построен неправильно, не учтено, что область допустимых значений не включает в себя точку $x = -4$.

Задание 22. Пример 18 (начало)

Задача 18. Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x - 12)}{(x^2 - 4x + 3)} \text{ и определите, при каких}$$

значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. Преобразуем уравнение функции, разложив на множители числитель и знаменатель дроби.

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

$$x^2 + x - 12 = 0,$$

$$x_1 = -4, x_2 = 3, x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3).$$

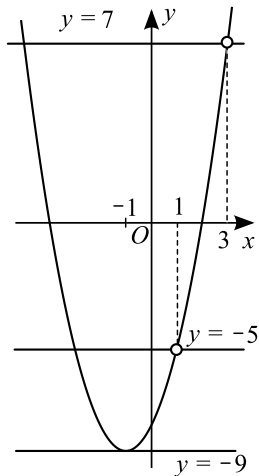
$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

$$y = \frac{(x - 1)(x - 2)(x + 4)(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)}; y = (x - 2)(x + 4);$$

$$y = x^2 + 2x - 8 \text{ при условии } x \neq 1, x \neq 3.$$

Задание 22. Пример 18 (продолжение)



Графиком функции является парабола с вершиной в точке $(-1; -9)$, из которой выброшены точки $(1; -5)$ и $(3; 7)$.

Прямая $y = t$ — горизонтальная прямая, параллельная оси абсцисс. Такая прямая имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $t = -9$, $t = -5$ и $t = 7$.

Задание 22. Пример 19 (начало)

Задача 19. Постройте график функции

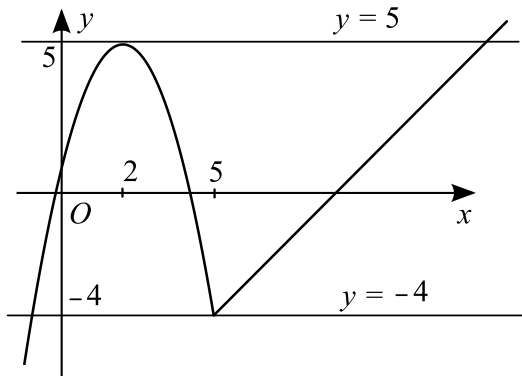
$$y = \begin{cases} x - 9, & \text{при } x \geq 5, \\ 1 + 4x - x^2, & \text{при } x < 5 \end{cases} \quad \text{и определите,}$$

при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение. При $x \geq 5$ график является лучом с началом в точке $(5; -4)$.

При $x < 5$ график является частью параболы с вершиной $(2; 5)$.

Задание 22. Пример 19 (продолжение)



Ровно две общие точки прямая $y = t$ имеет с графиком при $t = -4$ и $t = 5$, одну общую точку — при $t < -4$ и $t > 5$. Ровно три общие точки прямая $y = t$ имеет с графиком при $-4 < t < 5$.

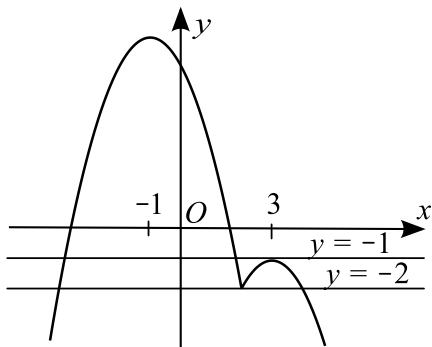
Задание 22. Пример 20 (начало)

Задача 20. Постройте график функции $y = 4|x - 2| - x^2 + 2x - 2$ и определите, при каких значениях q прямая $y = q$ имеет с графиком не менее трёх общих точек.

Решение. Если $x - 2 \geq 0$, то есть $x \geq 2$, то $y = -x^2 + 6x - 10$ — часть параболы с вершиной $(3; -1)$, $y(2) = -2$.

Если $x - 2 < 0$, то есть $x < 2$, то $y = -x^2 - 2x + 6$ — часть параболы с вершиной $(-1; 7)$.

Задание 22. Пример 20 (продолжение)



$y = q$ — прямая, параллельная оси абсцисс или совпадающая с ней.

По рисунку видно, что не менее трёх общих точек графики имеют при $-2 \leq q \leq -1$.

Задание 22. Пример 21 (начало)

Задача 20. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x - 3, & \text{при } x < -2, \\ -2,5x - 5,5, & \text{при } -2 \leq x \leq 0, \\ 1,5x - 5,5, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение. Рассмотрим промежуток $x < -2$ и вычислим значение в граничной точке и ещё в какой-нибудь точке промежутка: $x = -2$; $y = -2 - 3 = -5$; $x = -3$; $y = -6$. График является лучом (частью прямой $y = x - 3$) с выколотым началом в точке $(-2; -5)$.

При $-2 \leq x \leq 0$ вычисляем значения в граничных точках: $y(-2) = -2,5 \cdot (-2) - 5,5 = -0,5$,
 $y(0) = -2,5 \cdot 0 - 5,5 = -5,5$.

График является отрезком с концами в точках $(-2; -0,5)$ и $(0; -5,5)$.

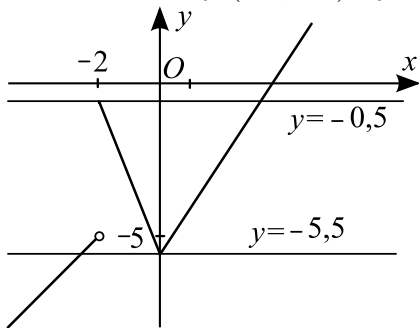
Задание 22. Пример 21 (продолжение)

При $x > 0$ найдём значение в граничной точке $x = 0$.

$$y(0) = 1,5 \cdot 0 - 5,5 = -5,5.$$

В точке $x = 2$ $y = 1,5 \cdot 2 - 5,5 = -2,5$. График является лучом с началом в точке $(0; -5,5)$.

В точке $x = 0$ значения совпали, точку не нужно выделять специально. В точке $x = -2$ значения не совпали, точку $(-2; -5)$ нужно нарисовать выколотой.



Ровно две общие точки
прямая $y = t$ имеет с
графиком при $t = -5,5$
и $-5 \leq t \leq -0,5$