

Тренировочная работа ЕГЭ по математике Профильный уровень, вариант 1

11 класс, Лицей НИУ ВШЭ

10 декабря 2024 года

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

1 Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 3, боковая сторона равна 16, а синус угла при основании равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите большее основание.

Ответ: _____

2 Даны векторы $\vec{a}(-2; 4)$ и $\vec{b}(3; -1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$.

Ответ: _____

3 Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3, а боковое ребро равно $\sqrt{15}$. Найдите объём пирамиды.

Ответ: _____

4 В отряде 21 человек, среди них две подруги — Лена и Катя. Отряд случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Лена и Катя окажутся в одной группе.

Ответ: _____

5 Из урны, в которой имеется 7 белых и 3 черных шара, извлекают один за другим 3 шара. Найти вероятность того, что цвета шаров будут чередоваться. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____

6 Решите уравнение

$$\log_{16}(0,5 - 4^{x-0,5}) = x.$$

Ответ: _____

7 Найдите значение выражения

$$2 \cos \frac{5\pi}{12} \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} - \sin^2 \frac{\pi}{24} \right).$$

Ответ: _____

8 Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции

$$y = \sqrt{2} \sin(3x) + 3$$

в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: _____

9 Оптическая сила объектива, с помощью которого предмет, сфотографированный с расстояния d_1 , получается на пленке высотой h_1 , а при фотографировании с расстояния d_2 — высотой h_2 , вычисляется по формуле:

$$D = \frac{h_1 - h_2}{d_2 h_2 - d_1 h_1}.$$

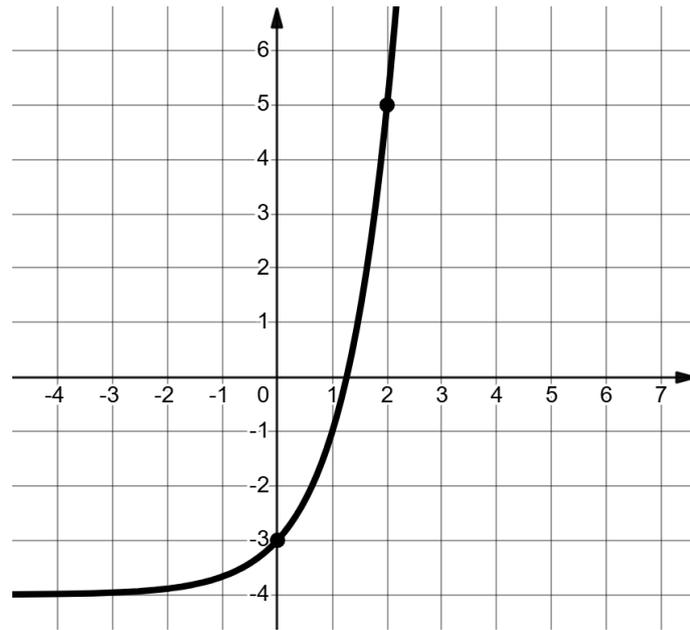
Пусть $d_1 = 2$ м, $h_2 = 0,02$ м, $d_2 = 4$ м и $D = 1,5$ м⁻¹. Найдите h_1 . Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____

10 Мастер раскрашивает 6 елочных шаров на 40 минут быстрее, чем его ученик раскрашивает 8 таких же шаров. Сколько таких шаров раскрасит ученик за 3 часа, если вместе с мастером они раскрашивают за час 15 шаров?

Ответ: _____

11 На рисунке изображен график функции $y = a^x + b$, где a и b — целые числа. Найдите $y(3)$.



Ответ: _____

12 Найдите точку максимума функции $y = \ln(2x - 8) - 5x + 7$.

Ответ: _____

Часть 2

13 а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\operatorname{tg} x} \cdot 3^{\sin 2x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\cos^2 x} \cdot 3^{3 \operatorname{tg} x}$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14 Через вершины A_1 и C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость α , параллельная прямой BC_1 . Сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 2.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB пополам.

б) Найдите расстояние от прямой BC_1 до плоскости α .

15 Решите неравенство

$$\frac{2 \log_6^2 x + 31}{2 \log_{36} 216x} \leq 10 + \log_{\frac{1}{6}} x^2.$$

16 Сергей планирует 17-го декабря 2025 года взять кредит в банке на 1 100 000 рублей на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 3-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

— с 4-го по 16-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 17-го числа каждого месяца, с января 2026 года по март 2027 года, долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 17-е число предыдущего месяца;

— к 17-му марта 2027 года долг должен быть равен 200 000 рублей;

— к 17-му апреля 2027 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1 620 000 рублей.

17 Из точки A к окружности проведены касательная AM (M — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках K и L (точка L лежит между A и K), такая, что треугольник AMK — остроугольный. Расстояние от центра окружности до хорды KM равно половине радиуса окружности.

а) Докажите, что угол AMK равен 60° .

б) Найдите площадь треугольника AMK , если $AL : LK = 4 : 3$ и радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \lg \left(8 - x^2 - \frac{8|x-3|}{x-3} \right) = \lg y, \\ y = |x+3| + a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

19 Из каждого четырёхзначного числа вычли сумму его цифр и полученный результат разделили на 99.

а) Могло ли получиться число 65?

б) Могло ли получиться число 15?

в) Сколько различных натуральных чисел могло получиться?

Тренировочная работа ЕГЭ по математике Профильный уровень, вариант 2

11 класс, Лицей НИУ ВШЭ

10 декабря 2024 года

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

1 Большее основание равнобедренной трапеции равно 13, боковая сторона равна 12, а синус угла при основании равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите меньшее основание.

Ответ: _____

2 Даны векторы $\vec{a}(-1; 5)$ и $\vec{b}(3; -2)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$.

Ответ: _____

3 Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 4. Найдите объём пирамиды.

Ответ: _____

4 В поход идут 16 лицеистов, среди них два друга — Петя и Паша. Учащиеся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Петя и Паша окажутся в одной группе.

Ответ: _____

5 Из урны, в которой имеется 7 белых и 3 черных шара, извлекают один за другим 3 шара. Найти вероятность того, что среди шаров будут как белые, так и черные.

Ответ: _____

6] Решите уравнение

$$\log_{81} \left(\frac{2}{3} + 9^{x-0,5} \right) = x.$$

Ответ: _____

7] Найдите значение выражения

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} \cdot \left(\cos^2 \frac{3\pi}{16} - \sin^2 \frac{3\pi}{16} \right).$$

Ответ: _____

8] Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции

$$y = \sqrt{3} \cos(4x) + 5$$

в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: _____

9] Оптическая сила объектива, с помощью которого предмет, сфотографированный с расстояния d_1 , получается на пленке высотой h_1 , а при фотографировании с расстояния d_2 — высотой h_2 , вычисляется по формуле:

$$D = \frac{h_1 - h_2}{d_2 h_2 - d_1 h_1}.$$

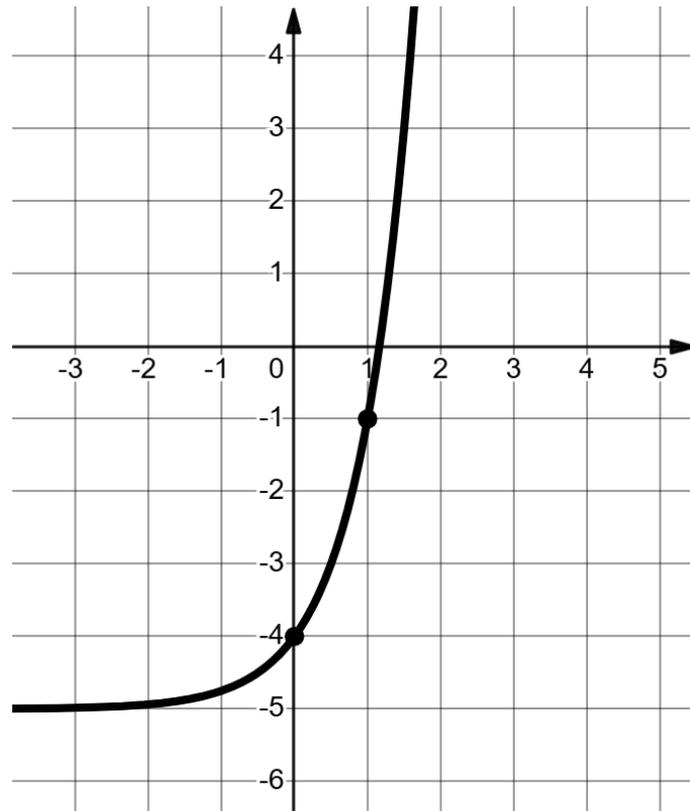
Пусть $d_1 = 1,4$ м, $h_1 = 0,04$ м, $d_2 = 2$ м и $D = 1,5$ м⁻¹. Найдите h_2 . Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____

10] Мастер изготавливает 3 елочных игрушки на полчаса быстрее, чем его ученик изготавливает 6 таких же игрушек. Сколько игрушек изготавливает мастер за 3 часа, если вместе с учеником они за час делают 20 игрушек?

Ответ: _____

11 На рисунке изображен график функции $y = a^x + b$, где a и b — целые числа. Найдите $y(2)$.



Ответ: _____

12 Найдите точку максимума функции $y = \ln(4x - 20) - 5x + 11$.

Ответ: _____

Часть 2

13 а) Решите уравнение

$$16^{\operatorname{tg} x} \cdot 2^{\sin 2x} = 4^{\cos^2 x} \cdot 0,5^{-4 \operatorname{tg} x}$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 Через вершины A и B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость α , параллельная прямой CA_1 . Сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 2.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро BC пополам.

б) Найдите расстояние от прямой CA_1 до плоскости α .

15 Решите неравенство:

$$\frac{6 \log_8^2 x - 2}{2 \log_{64} 0,125x} \leq 27 + \log_{\frac{1}{8}} x^3.$$

16 Андрей планирует 17-го декабря 2025 года взять кредит в банке на 1 200 000 рублей на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 3-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

— с 4-го по 16-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 17-го числа каждого месяца, с января 2026 года по март 2027 года, долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 17-е число предыдущего месяца;

— к 17-му марта 2027 года долг должен быть равен 150 000 рублей;

— к 17-му апреля 2027 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1 632 000 рублей.

17 Из точки M к окружности проведены касательная MB (B — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках K и A (точка K лежит между M и A), такая, что треугольник AMB — остроугольный. Расстояние от центра окружности до хорды AB равно половине радиуса окружности.

а) Докажите, что угол MBA равен 60° .

б) Найдите площадь треугольника AMB , если $MA = 7MK$ и радиус окружности равен $4\sqrt{21}$.

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \lg \left(8 - x^2 + \frac{8|x+3|}{x+3} \right) = \lg y, \\ y = |x-2| + a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

19 Из каждого четырёхзначного числа вычли сумму его цифр и полученный результат разделили на 99.

а) Могло ли получиться число 45?

б) Могло ли получиться число 20?

в) Сколько различных натуральных чисел могло получиться?

Ответы:
1 вариант

1. 11
2. 40
3. 4, 5
4. 0, 3
5. 0, 23
6. $-0,5$
7. 0, 5
8. -3
9. 0, 035
10. 18
11. 23
12. 4, 2
13. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; б) $-\frac{13\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}$.
14. б) $\frac{6}{\sqrt{13}}$.
15. $(0; \frac{1}{216}) \cup \{\sqrt{6}\}$.
16. 5
17. б) $S_{AMK} = 42\sqrt{3}$.
18. $(-1; 1] \cup \{13, 25\}$.
19. а) да, например: 6450; б) нет; в) 80.

Ответы:
2 вариант

1. 7

2. 65

3. 6

4. 0,2

5. 0,7

6. 0

7. 0,5

8. -6

9. 0,031

10. 36

11. 11

12. 5,2

13. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; б) $-\frac{15\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}$.

14. б) $\frac{6}{\sqrt{13}}$.

15. $(0; 8) \cup 32$.

16. 4

17. б) $S_{AMK} = 84\sqrt{3}$.

18. $(-2; 2] \cup \{14, 25\}$.

19. а) да, например: 4475; б) нет; в) 80.