

Алгебра

Свойства арифметического квадратного корня

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ при } a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a \geq 0, b > 0$$

Тождества

$$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0 \quad \sqrt{a^2} = |a|, a \in R$$

При решении уравнений с корнями делать проверку!

Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ при } b^2 - 4ac > 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ при } b^2 - 4ac = 0$$

Формулы Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$ используют для нахождения корней уравнения $x^2 + px + q = 0$

Формула разложения трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

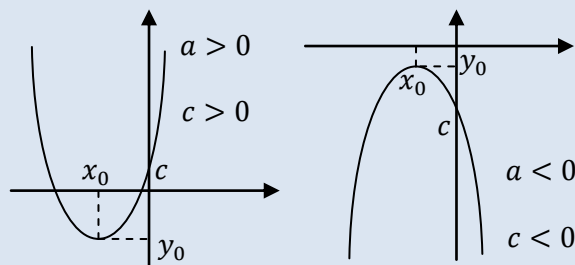
Формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ принимает наибольшее или наименьшее значение в точке - вершине параболы с абсциссой $x_0 = \frac{-b}{2a}$



Арифметическая прогрессия

Формула n -го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия

Формула n -го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Степень с рациональным показателем ($a \geq 0$):

$$\frac{m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } n - \text{натуральное}, n \geq 2, m - \text{целое}$$

Некоторые свойства корня -й степени

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Свойства степени с действительным показателем.

Пусть a, b, x, y - действительные числа и $a > 0, b > 0$:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Определение логарифма

$$\log_a b = c \iff \begin{matrix} a^c = b \\ a > 0, b > 0, a \neq 1 \end{matrix}$$

Свойства логарифма

Пусть $a > 0, a \neq 1, n > 0, n \neq 1, b, c > 0$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a}$$

Другие полезные свойства

$$\log_a b^r = \frac{1}{r} \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$$

Начала математического анализа

Таблица производных

$$(C)' = 0 \quad (C = \text{const})$$

$$(x)' = 1$$

$$(kx + b)' = k$$

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$$((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

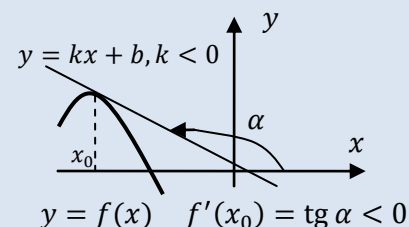
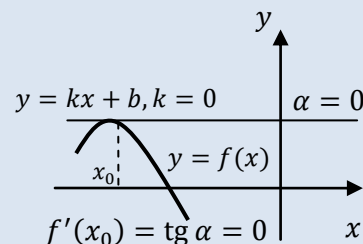
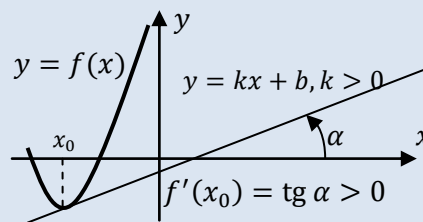
$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Геометрический смысл производной

Значение производной функции в точке касания x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке: $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$



Правила дифференцирования

Пусть $f(x)$, $g(x)$ - дифференцируемые функции.

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(C \cdot f)' = C \cdot f'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad g \neq 0$$

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

Монотонность и экстремумы функции

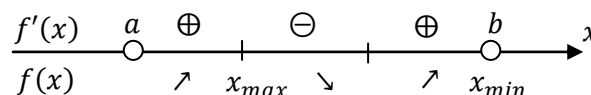
Пусть функция $f(x)$ имеет производную на $(a; b)$.

Если производная функции положительна на этом интервале, то функция возрастает на нём.

Если производная функции отрицательна на этом интервале, то функция убывает на нём.

Если производная в некоторой точке меняет знак с "+" на "-", то функция имеет в этой точке максимум.

Если производная в некоторой точке меняет знак с "-" на "+", то функция имеет в этой точке минимум.



Если функция имеет на промежутке единственную точку экстремума и этот экстремум - максимум (минимум), то в этой точке достигается наибольшее (наименьшее значение функции).

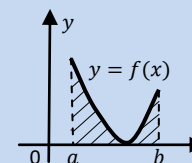
Если рассматриваемый промежуток - отрезок $[a; b]$, и на нем точек экстремума более одной или их нет, то наибольшее и наименьшее значение может достигаться в концах данного отрезка (в точках a и b).

Определение первообразной

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Площадь криволинейной трапеции

Криволинейная трапеция - это фигура, ограниченная снизу осью x , сверху - графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, а с боков - отрезками прямых $x = a$ и $x = b$.



Площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле: $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ - любая первообразная функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называют интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Физический смысл производной

Пусть $x = x(t)$ - закон изменения расстояния от материальной точки до точки отсчета, t - время в секундах, измеренное с начала движения.

Тогда

$$v(t) = x'(t)$$

где $v(t)$ - скорость в момент времени t .

Скорость - производная пути по времени.

Тригонометрия

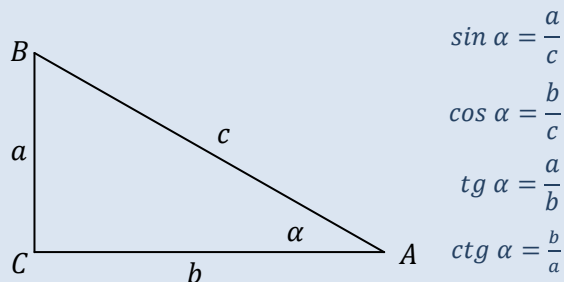
Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике

Синусом острого угла называется отношение *противолежащего* катета к *гипотенузе*

Косинусом острого угла называется отношение *прилежащего* катета к *гипотенузе*

Тангенсом острого угла называется отношение *противолежащего* катета к *прилежащему* катету

Котангенсом острого угла называется отношение *прилежащего* катета к *противолежащему* катету



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Тригонометрическая окружность

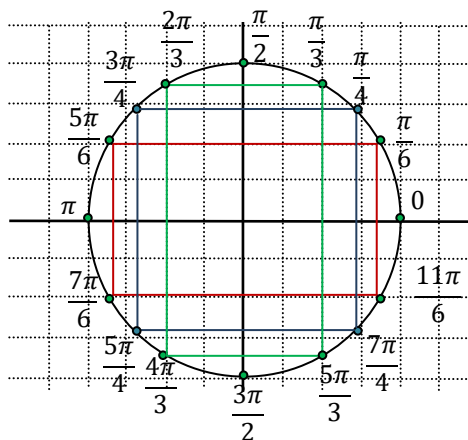
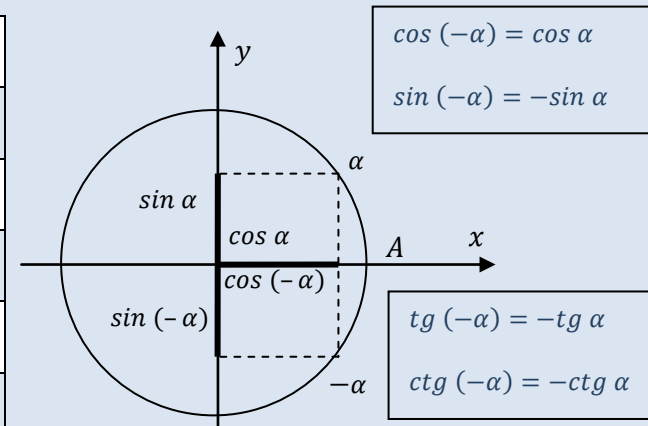


Таблица значения тригонометрических функций

$\alpha \text{ рад}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
α°	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Синус, косинус, тангенс и котангенс углов t и $-t$



$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

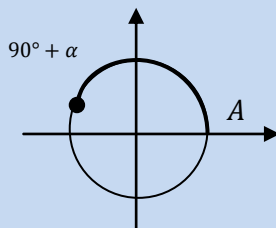
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Формулы приведения заменяют тригонометрические функции от аргументов $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$ функциями от аргумента α **по правилу:**

1. В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < 90^\circ$.
2. Если в левой части аргумент равен $90^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, косинус - на синус, тангенс - на котангенс, котангенс - на тангенс. Если аргумент равен $180^\circ \pm \alpha$, то замены не происходит.



Используем правило для записи формулы $\sin(90^\circ + \alpha)$.

1. Угол $90^\circ + \alpha$ - угол II четверти, его синус > 0 , в правой части формулы ставим знак +.

2. Аргумент равен $90^\circ + \alpha$, синус заменяется на косинус, формула примет вид: $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

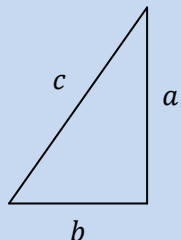
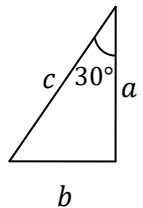
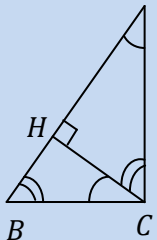
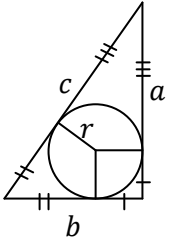
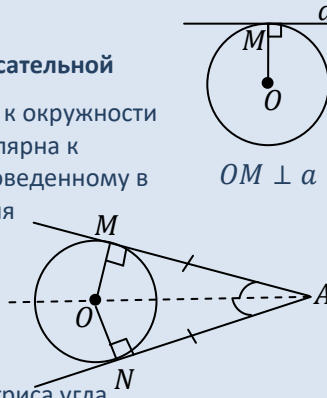
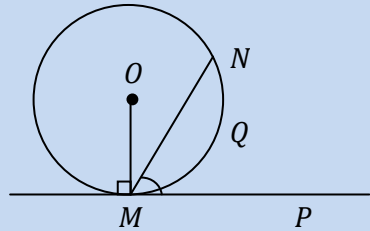
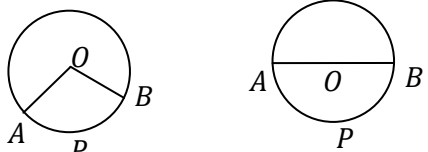
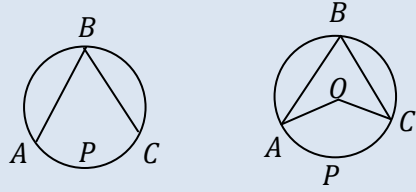
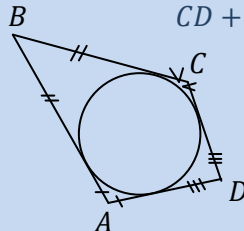
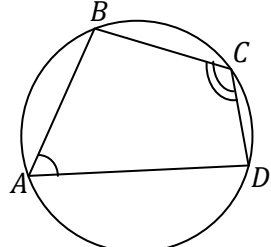
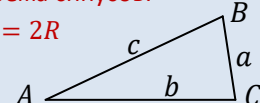
$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Формулы сложения:

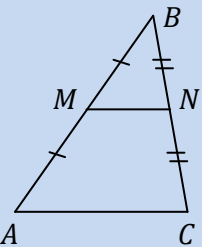
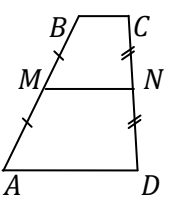
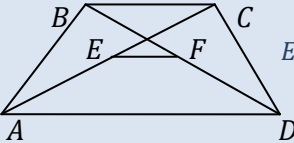
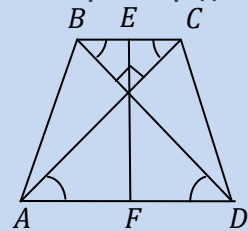
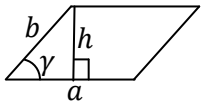
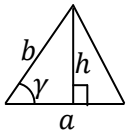
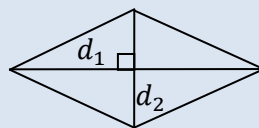
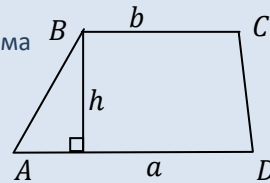
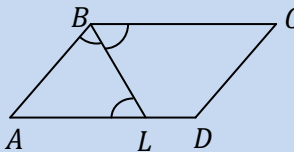
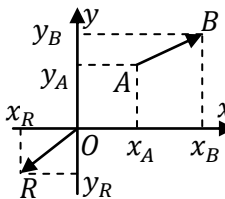
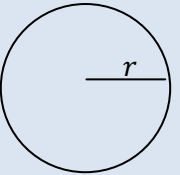
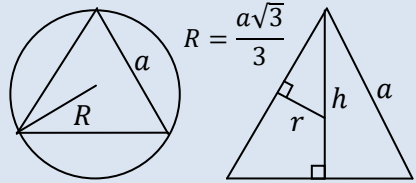
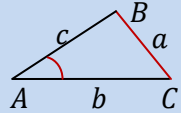
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

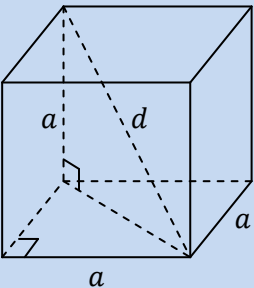
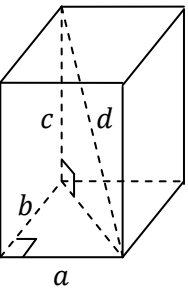
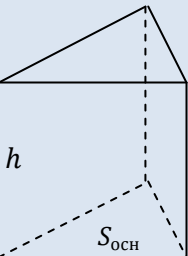
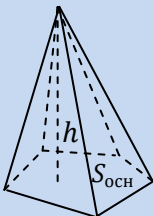
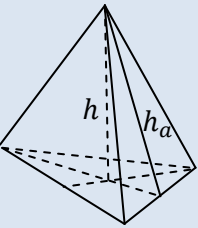
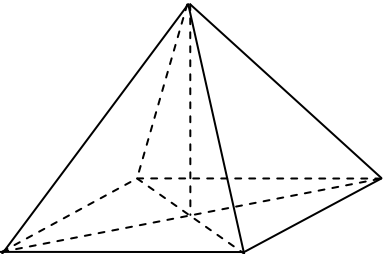
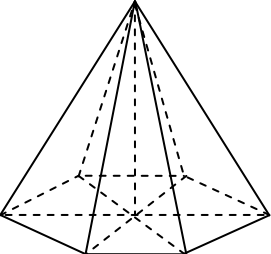
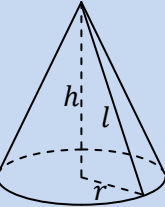
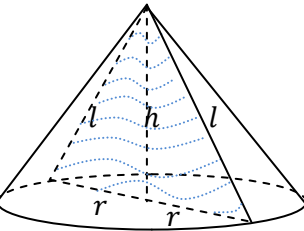
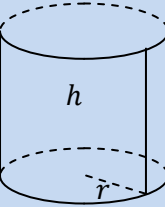
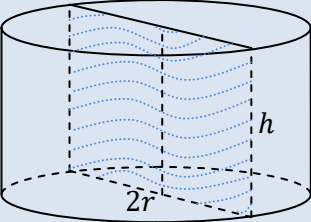
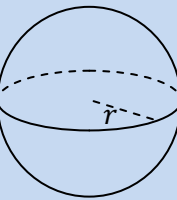
Планиметрия

Прямоугольный треугольник Теорема Пифагора  $a^2 + b^2 = c^2$	Свойство угла в 30°  Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы: $b = \frac{c}{2}$ Если в прямоугольном треугольнике один из углов равен 45°, то он равнобедренный	Свойство медианы прямоугольного треугольника  Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. $DA = DB = DC = R$, где R – радиус описанной окружности	Свойство высоты прямоугольного треугольника  Высота, проведенная к гипотенузе, делит прямоугольный треугольник на два подобных
Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно вычислить по формуле: $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a, b – катеты, c – гипотенуза.  Также радиусы находят, пользуясь методом площадей, применяя формулы $S = \frac{ab}{2}, \quad S = pr,$ $S = \frac{abc}{4R}$	Окружность Свойство касательной Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания  $OM \perp a$ $AM = AN$ AO – биссектриса угла	Угол между хордой и касательной измеряется половиной содержащейся в этом угле дуги окружности  $\angle NMP = \frac{1}{2} \angle MON$	Градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается  $\angle AOB = \angle APB$ $\angle AOB = \angle APB = 180^\circ$
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается  $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle APC$ $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$	Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны  $CD + AB = BC + AD$	Если около четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$	В треугольнике радиусы вписанной и описанной окружности можно найти, пользуясь методом площадей, то есть применяя формулы $S = \frac{ah}{2}$, $S = pr$, $S = \frac{abc}{4R}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ и $S = \frac{absinC}{2}$. Также для нахождения радиуса описанной окружности используется теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 

Планиметрия 2

Средняя линия треугольника  MN – средняя линия $MN \parallel AC$ $MN = \frac{AC}{2}$	Средняя линия трапеции  MN – средняя линия $MN \parallel AD, MN \parallel BC$ $MN = \frac{AD + BC}{2}$	Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности её оснований. Это можно обосновать, если достроить данный отрезок до средней линии.  $EF = \frac{AD - BC}{2}$	Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то её высота равна средней линии  $EF = \frac{AD + BC}{2}$
Площади параллелограмма и треугольника  $S = ah$ $S = ab \sin \gamma$  $S = \frac{ah}{2}$ $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$	Площадь ромба и трапеции Площадь ромба можно найти, используя формулы площади параллелограмма  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$  $S = \frac{a + b}{2} \cdot h$	Биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник  Для нахождения элементов параллелограмма и ромба можно также использовать метод площадей!	Координаты вектора  Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ $\overrightarrow{OR}(x_R; y_R), \overrightarrow{OR}$ - радиус-вектор
Длина окружности $C = 2\pi r$ Площадь круга $S = \pi r^2$ 	Правильный треугольник. Вписанная и описанная окружности  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ В правильном треугольнике все углы равны 60°. В правильном треугольнике все медианы, как и в любом треугольнике, делятся точкой пересечения в отношении 2:1. Поэтому $R = \frac{2}{3}h$ и $r = \frac{1}{3}h$. Правильный четырехугольник – квадрат.	Правильный шестиугольник можно разбить на 6 правильных треугольников  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6$ Теорема косинусов  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	Длина вектора Если дан вектор $\vec{c}(x; y)$, то его длина вычисляется по формуле: $\vec{c} = \sqrt{x^2 + y^2}$ Скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \widehat{a \vec{b}}$ Если $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ $\cos \widehat{a \vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$

Стереометрия

Куб  $S_{\text{пов}} = 6a^2$ $V = a^3$ $d = a\sqrt{3}$	Прямоугольный параллелепипед  $S_{\text{пов}} = 2ab + 2bc + 2ac$ $V = abc$ $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$	Прямая призма  $V = S_{\text{осн}} \cdot h$ $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$ $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$	Пирамида  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$
Правильная пирамида  $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_a$	В основании правильной треугольной пирамиды – правильный треугольник В основании правильной четырехугольной пирамиды – квадрат В основании правильной шестиугольной пирамиды – правильный шестиугольник Высота правильной пирамиды проходит через центр основания пирамиды		
Правильная четырехугольная пирамида  Чертеж правильной пирамиды нужно начинать с основания пирамиды, затем находить его центр (пересечь медианы в случае треугольника, диагонали в случае квадрата и большие диагонали в случае правильного шестиугольника) и через центр проводить высоту, на ней отмечать вершину пирамиды и соединять её с вершинами основания.	Правильная шестиугольная пирамида 	Конус  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $S_{\text{бок}} = \pi r l$ $S_{\text{пов}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$	Осевое сечение конуса 
Цилиндр  $V = \pi r^2 h$ $S_{\text{бок}} = 2\pi r h$ $S_{\text{пов}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$	Осевое сечение цилиндра  Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, а объёмы подобных тел – как куб коэффициента подобия!		
Шар  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $S_{\text{пов}} = 4\pi r^2$			