МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСТКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методическое пособие для подготовки к ОГЭ по теме «Окружность»

Разработали: учитель математики
МБОУ «Лицей №11» г. Россоши
Горбанева Т.А.
студенты очной формы обучения
3 курса физико-математического
факультета Деренко И.Ю.,
Проскурина В.А.

Воронеж – 2023

Пояснительная записка

План подготовки к ОГЭ по математике в 9 классе составлен на основе Методических рекомендаций ФИПИ. Подготовлен на основе анализа типичных ошибок участников ОГЭ 2022 года по математике, демонстрационного варианта КИМ ОГЭ по математике 2022 года Кодификатора элементов содержания и Спецификации КИМ 2022 года.

Подготовка к ОГЭ позволяет школьникам систематизировать, расширять и укреплять знания, научиться выполнять разно уровневые задания базовой и повышенной сложности, способствует выработке и закреплению навыков работы. Повторение реализуется в виде обзора теоретических вопросов по теме «Окружность», разбора и решения задач.

Содержание

Глава 1. Теоретическая часть

1.1 Основные понятия об окружности

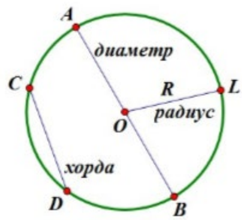


Рис. 1

Окружностью называется множество точек, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки, которая называется центром окружности.

Для любой точки L (Рис.1), лежащей на окружности выполняется равенство $OL = R$. Длина отрезка OL равна радиусу окружности.

Радиус окружности – это отрезок от центра окружности до любой ее точки.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ***хордой*** $\boldsymbol{CD}$(Рис. 1)**.**

Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром*** окружности D (AB на Рис.1)**.**Диаметр окружности равен двум радиусам, $D = 2R$.

Длина окружности – это общая длина границы круга. В математике длину окружности обозначают латинской буквой C.

$$C = 2\pi r$$

Площадь круга:

$$S = \pi r^2$$

Часть окружности, заключенная между двумя ее точками, называется ***дугой*** окружности.

Равные хорды стягивают равные дуги (Рис.2).

$$AB = CD \Rightarrow \smile AB = \smile CD$$

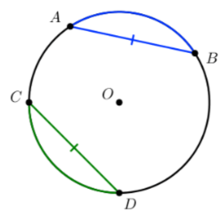


Рис. 2

Диаметрили радиус, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и дуги, которые она стягивает пополам (Рис.3).

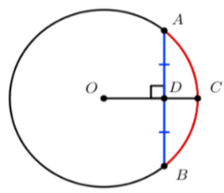


Рис. 3

Если хорды AB и CD окружностипересекаются в точкеN(Рис.4), то ***произведения отрезков хорд, на которые они***

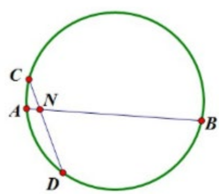


Рис. 4

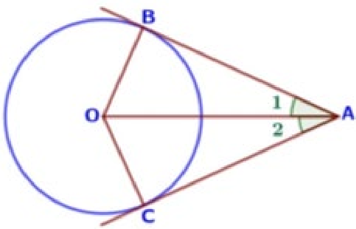
делятся точкой N, равнымежду собой:

$$AN \cdot NB = CN \cdot ND$$

Касательная к окружности *перпендикулярна* к радиусу, проведенному в точку касания (Рис.5).

Рис. 5

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, **равны**и составляют**равные углы** с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности (Рис.6).



$$AB = AC,$$

$$\angle 1 = \angle 2.$$

Рис. 6

Если из данной точки проведены к окружности касательная и секущая, то ***квадрат длины отрезка касательной равен произведению всего отрезка секущей на его внешнюю часть (Рис.7)***:

$$AC^2 = CD \cdot BC$$

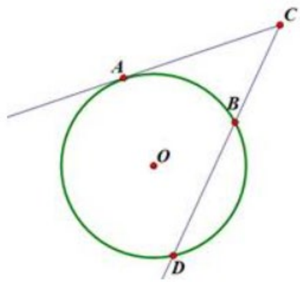
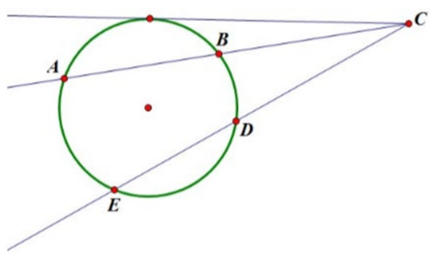


Рис. 7

Произведение всего отрезка одной секущей на его внешнюю часть равно произведению всего отрезка другой секущей на его внешнюю часть (Рис.8):

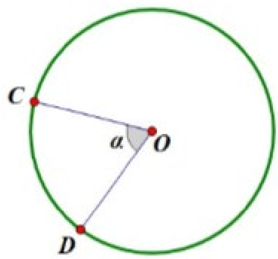


$$AC \cdot BC = EC \cdot DC$$

Рис. 8

1.2 Углы в окружности

Градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается (Рис.9):



$$\angle COD = \smile CD = \alpha°$$

Рис. 9

Градусная мера **вписанного угла** (вершина лежит на окружности) измеряется **половиной** дуги, на которую он опирается (Рис.10):

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle 2 = \frac{1}{2}\smile AB$$

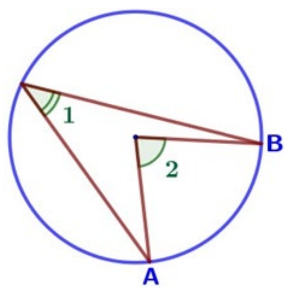


Рис. 10

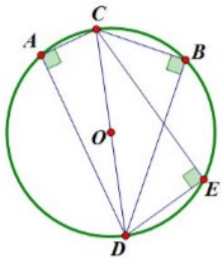


Рис. 11

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой (Рис.11):

$$\angle CBD = \angle CED = \angle CAD = 90°$$

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны(Рис.12):

$$\angle 1 = \angle 2 = 3$$

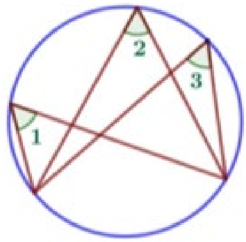


Рис. 12

Вписанные углы, опирающиеся на одну хорду равны или их сумма равна 180°(Рис.13).

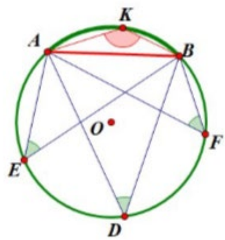


Рис. 13

$$\angle ADB + \angle AKB = 180°$$

$$\angle ADB = \angle AEB = \angle AFB$$

Вершины треугольников с заданным основанием и равными углами при вершине лежат на одной окружности (Рис.14):

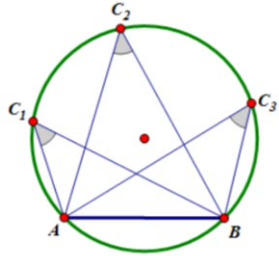


Рис. 14

Угол между двумя хордами (угол с вершиной внутри окружности) равен полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри данного угла и внутри вертикального угла (Рис.15):

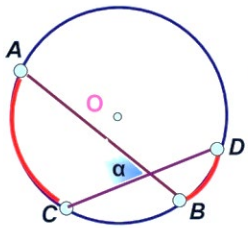


Рис. 15

$$\alpha = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile BD)$$

Угол между двумя секущими (угол с вершиной вне окружности) равен полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла (Рис.16):

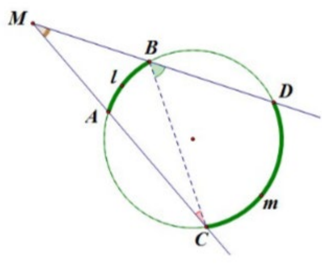


Рис. 16

$$\angle M = \angle CBD - \angle ACB = \frac{1}{2}(\smile DmC - \smile AlB)$$

1.3 Вписанная и описанная окружность

Окружность называется ***вписанной в многоугольник***, если она касается его сторон.

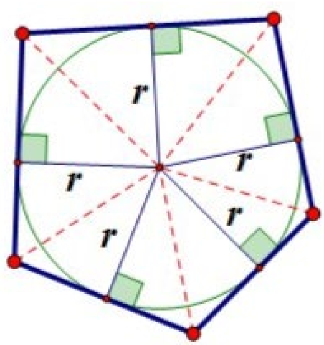


Рис. 17

Центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис углов многоугольника (Рис.17).

Не во всякий многоугольник можно вписать окружность.

Площадь многоугольника, в который вписана окружность можно найти по формуле:

$$S = pr,$$

где p - полупериметр многоугольника, r - радиус вписанной окружности.

Отсюда **радиус вписанной окружности** равен:

$$r = \frac{S}{p}$$

Если в выпуклый четырехугольник вписана окружность, то суммы длин противоположных сторон равны*(Рис.18)*.

Обратно: если в выпуклом четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в четырехугольник можно вписать окружность:

$$AB + DC = AD + BC$$

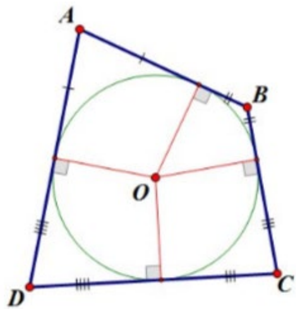


Рис. 18

Влюбой треугольник можно вписать окружность, притом только одну.

Центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника(Рис.19).

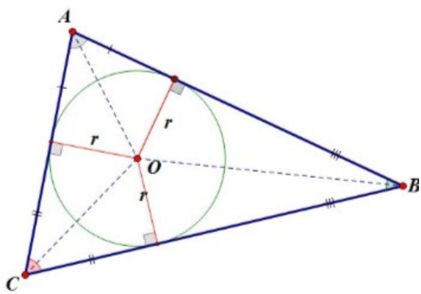


Рис. 19

Радиус вписанной окружности равен: $r = \frac{S}{p}$

Здесь $p = \frac{a+b+c}{2}$

Окружность называется ***описанной около многоугольника***, если она проходит через все вершины многоугольника (Рис.20).

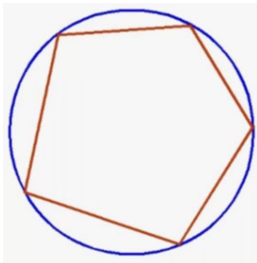


Рис. 20

Радиус вычисляется как радиус окружности, описанной около треугольника, определенного любыми тремя вершинами данного многоугольника:

<u>Около четырехугольника</u> можно <u>описать окружность</u> тогда и только тогда, когда <u>сумма его противоположных углов равна 180°</u>(Рис.21):

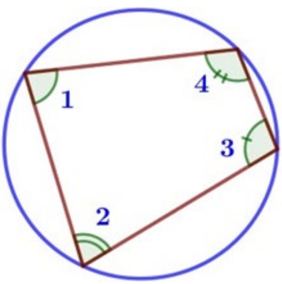


Рис. 21

$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 180°$$

Около любого треугольника можно описать окружность, притом только одну. Ее центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника(Рис.22):

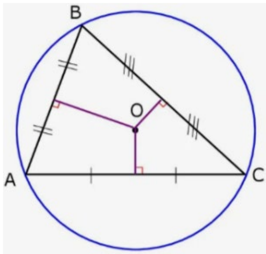


Рис. 22

Радиус описанной окружности вычисляется по формулам:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$R = \frac{abc}{2S}$$

Где a, b, c - длины сторон треугольника, S - его площадь (Рис.23).

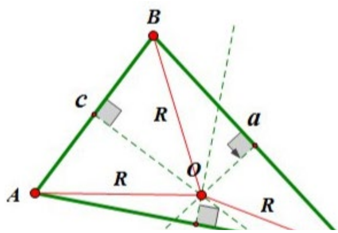


Рис. 23

1.4 Связь правильного треугольника, шестиугольника и квадрата с окружностью.

1. Выражение R и r через сторону a для правильного 3-угольника.

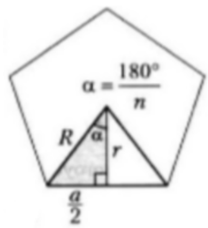


Рис. 24

Из закрашенного прямоугольного треугольника (Рис.24) $\frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin 60°$; $a = 2R\frac{\sqrt{3}}{2}$;$a = R\sqrt{3}$

Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то $r = \frac{R}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

2. **Выражение R и r через сторону а для правильного 4-угольника.**

Из закрашенного прямоугольного треугольника (Рис.25) $\frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin 45°$; $a = 2R\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a = R\sqrt{2}$; $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $r = \frac{a}{2}$.

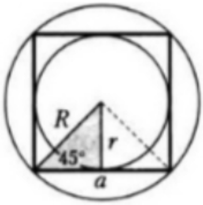


Рис. 25

3. **Выражение $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}$ через сторону $\boldsymbol{a}$ для правильного 6-угольника.**

Так как центральный угол, который опирается на сторону правильного шестиугольника, равен $\frac{360°}{6} = 60°$, то равнобедренный треугольник, образованный двумя радусами R, Rи стороной a, является равносторонним. Отсюда $a = R,\ r = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4. **Выражение стороны a через R и r для правильного n-угольника.**

Соединим центр правильного многоугольника с двумя соседними вершинами (Рис.24).

Получим равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным $\frac{360°}{n}$. Половина его равна $\frac{180°}{n}$, где n — число сторон. Из прямоугольного треугольника находим:

1) $\frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin\frac{180°}{n}$, откуда $a = 2R\sin\frac{180°}{n}$;
2) $\frac{\frac{a}{2}}{r} = \tan\frac{180°}{n}$, откуда $a = 2r\tan\frac{180°}{n}$.

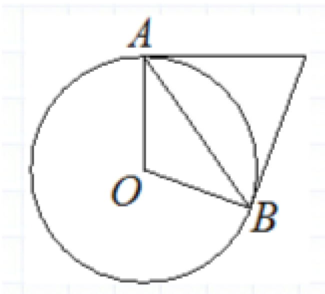
Площадь сегмента:

Площадь сегмента равна площади сектора минус или плюс площадь равнобедренного треугольника, образованного радиусами этого сектора. Минус — если центральный угол сектора меньше $180°$, и плюс — если больше $180°$. Если центральный угол равен $180°$, то этот сегмент — полукруг, и его площадь равна $\frac{\pi R^2}{2}$.

Глава 2. Практическая часть

<u>Касательная к окружности</u>

Пример №1: Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 58°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



Дано:$\omega(O; R)$, угол между касательными 58°.

Найти:$\angle ABO$

Решение:

1) Обозначим точку пересечения касательных как C. ∠C по условию 58°.
2) Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны, поэтому AC=BC, следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.
3) Отсюда $\angle CAB = \angle CBA = (180 - \angle ACB) / 2 = (180° - 58°) / 2 = 61°$.
4) Касательные перпендикулярны радиусу, проведенному в точку касания, следовательно $\angle CBO = 90°$
$\angle ABO = \angle CBO - \angle CBA = 90° - 61° = 29°$.

Ответ: 29°

Задания для закрепления:

№1. В угол С величиной 79° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках А и В, точка О – центр окружности. Найдите угол АОВ. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _______________

№2. В угол С величиной 83° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках А и В, точка О – центр окружности. Найдите угол АОВ. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _______________

№3. В угол С величиной 107° вписана.окружность, которая касается сторон угла в точках А и В, точка О – центр окружности. Найдите угол АОВ. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _______________

№4. В угол С величиной 115° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках А и В, точка О – центр окружности. Найдите угол АОВ. Ответ дайте в градусах.

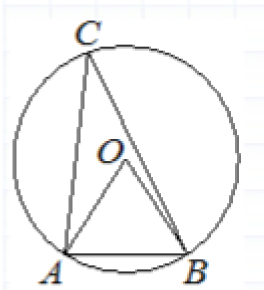
Ответ: _______________

№5. Касательные в точках А и В к окружности с центром О пересекаются под углом 56°. Найдите угол АВО. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ______________

<u>**Центральные и вписанные углы**</u>

Пример №2: Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 64°. Ответ дайте в градусах.



Дано: $\boldsymbol{\Delta} ABC, \omega(O;R), \angle AOB = 64°.$

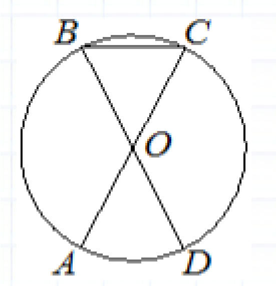
Найти:$\angle ACB$

Решение:

1) Угол AOB является центральным углом, $\angle ACB$ — вписанным.
2) Оба угла опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle ACB$ в два раза меньше $\angle AOB$.
$\angle ACB = \angle AOB / 2 = 64° / 2 = 32°.$

Ответ:$32°.$

Пример №3: В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD – диаметры. Угол AOD равен 72°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Дано:$\omega(O;OD), \angle AOD = 72°.$

Найти:$\angle ACB$

Решение:

1) Углы AOD и BOC - вертикальные, значит $\angle AOD = \angle BOC = 72°$.

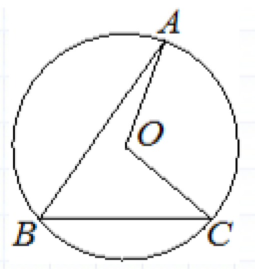
2) Поскольку AC и BD - диаметры, BO = OC, то есть треугольник BOC - равнобедренный, значит его углы при основании равны.

3) Сумма углов треугольника равна 180°.

4) $\angle ACB = \angle OCB = (180° - 72°) / 2 = 108° / 2 = 54°$.

Ответ: 54°.

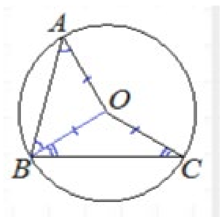
Пример №4: Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что $\angle ABC = 49°$ и $\angle OAB = 34°$. Найдите ∠BCO. Ответ дайте в градусах.



Дано: $\omega(O; OD), \angle ABC = 49°, \angle OAB = 34°$.

Найти: $\angle BCO$.

Решение:



1) Проведём радиус OB. Рассмотрим треугольник AOB: AO = OB, следовательно, углы при основании равнобедренного треугольника

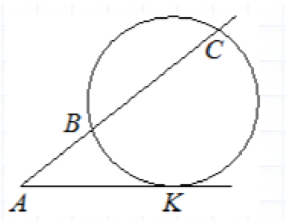
$$\angle OAB = \angle ABO = 34°.$$

2) Рассмотрим треугольник BOC: BO = OC, следовательно,

$$\angle BCO = \angle OBC = \angle ABC - \angle ABO$$
$$= 49° - 34° = 15°.$$

Ответ: 15°.

Пример №5: Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=7, AC=28. Найдите AK.



Дано: $\omega(O; R)$, AB=7, AC=28.

Найти: AK.

Решение:

1) По теореме о касательной и секущей:
$AK^2 = AB \cdot AC$
$AK^2 = 7 \cdot 28$
$AK^2 = 196$
$AK = \sqrt{196} = 14$

Ответ: 14.

Задания для закрепления:

№1. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 47°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№2. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 113°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№3. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 173°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№4. Отрезки AC и BD – диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 19°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.

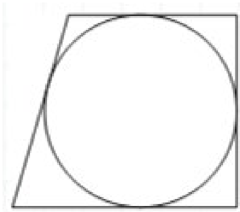
Ответ: ________________

№5. Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что $\angle ABC=56°$ и $\angle OAB=15°$. Найдите $\angle BCO$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

Вписанная окружность

Пример№6: Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 38. Найдите высоту этой трапеции.



Дано:$\omega(O;R)$.

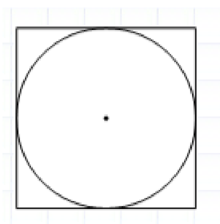
Найти:h

Решение:

1) Собственно из рисунка видно, что диаметр окружности равен высоте окружности, особенно это становится очевидным, если высоту провести перпендикулярно основаниям через центр окружности. То есть получается высота равна два радиуса
$2 \cdot 38 = 76$

Ответ: 76.

Пример№7: Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 11.



Дано: квадрат и $\omega(O;R), R = 11$.

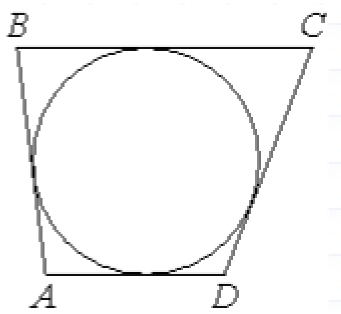
Найти: $S_{кв}$

Решение:

1) Так как радиус 11, значит диаметр 22, и он равен длине стороны квадрата.
$S_{\text{кв}} = 22^2 = 484$

Ответ: 484.

Пример№8: Четырёхугольник ABCD описан около окружности, AB=14, BC=15, CD=23. Найдите AD.



Дано: $\omega(O; R)$, четырёхугольник ABCD, $AB = 14, BC = 15, CD = 23.$

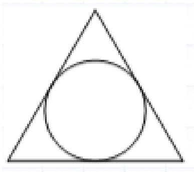
Найти: AD

Решение:

1) По второму свойству вписанной в четырехугольник окружности: если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противолежащих сторон равны
$AB + CD = BC + AD$
$AD = AB + CD - BC$
$AD = 14 + 13 - 15$
$AD = 22$

Ответ: 22.

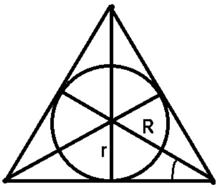
Пример№9: Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $11\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.



Дано: $\omega(O; R)$ и треугольник, $R = 11\sqrt{3}$

Найти: a.

Решение:



1) Проведем еще две прямые (биссектрисы, медианы, высоты) в равностороннем треугольнике. Получим 6 прямоугольных равных треугольников, в который один угол равен 30 градусов, а значит равен половине гипотенузы. Используя теорему Пифагора можем вычислить второй катет этого треугольника и умножить на два, тем самым получив сторону треугольника.
2) $4(11\sqrt{3})^2 = (11\sqrt{3})^2 + x^2$

   $x^2 = 3(11\sqrt{3})^2$

   $x^2 = 3 \cdot 121 \cdot 3$

   $x = \sqrt{1089}$

   $x = 33$
3) $33 \cdot 2 = 66$

Ответ: 66

Задания для закрепления:

№1. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 18. Найдите высоту этой трапеции.

Ответ: ________________

№2. Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 32. Найдите высоту этой трапеции.

Ответ: ________________

№3. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 30. Найдите высоту этой трапеции.

Ответ: ________________

№4. Сторона квадрата равна 16. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

Ответ: ________________

№5. Сторона квадрата равна 34. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

Ответ: ________________

№6. Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 40.

Ответ: ________________

№7. Четырёхугольник ABCD описан около окружности, AB=5, BC=12, CD=16. Найдите AD.

Ответ: ________________

№8. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 7. Найдите высоту этого треугольника.

Ответ: _______________

№9. Сторона равностороннего треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

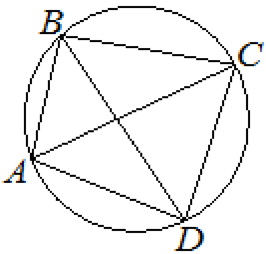
Ответ: _______________

№10. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $7\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

Ответ: _______________

Описанная окружность

Пример №10: Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 38°, угол CAD равен 54°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Дано:

ABCD – четырехугольник

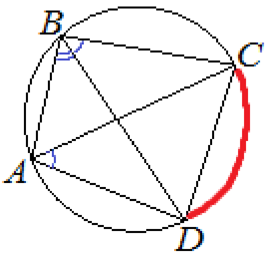
$\angle ABD = 38°$

$\angle CAD = 54°$

Найти: $\angle ABC$

Решение:

Угол CAD и угол CBD — вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, а значит, они равны:



$$\angle CBD = \angle CAD = 54°$$

Следовательно,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 38° + 54° = 92°$$

Ответ: 92.

Задания для закрепления:

№1. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 82°, угол CAD равен 28°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _______________

№2. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 51°, угол CAD равен 42°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _______________

№3. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 138°, угол CAD равен 83°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _______________

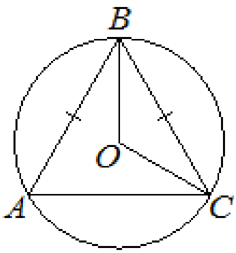
№4. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 132°, угол CAD равен 80°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _______________

№5. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 92°, угол CAD равен 60°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _______________

Пример №11: Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=57°. Найдите величину угла BOC. Ответ дайте в градусах.



Дано:

ABC – треугольник

O – центр окружности

$AB = BC$

$\angle ABC = 57°$

Найти: $\angle BOC$

Решение:

Сумма углов треугольника равна 180°. Треугольник ABC — равнобедренный, следовательно

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{(180° - \angle ABC)}{2}$$

Угол BAC — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую опирается. Угол BOC — центральный, поэтому он равен величине дуги, на которую опирается.

Углы BAC и BOC опираются на одну и ту же дугу, следовательно,

$$\angle BOC = 2\angle BAC = \frac{2 \cdot (180° - \angle ABC)}{2} =$$
$$= 180° - \angle ABC$$

$$\angle BOC = 180° - 57° = 123°$$

Ответ: 123.

Задания для закрепления:

№1. Окружность с центром в точке О описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=25°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№2. Окружность с центром в точке О описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=79°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№3. Окружность с центром в точке О описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=32°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

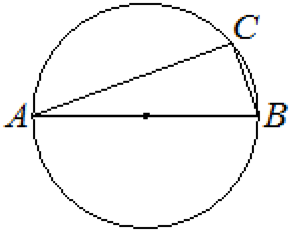
№4. Окружность с центром в точке О описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=66°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№5. Окружность с центром в точке О описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=88°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

Пример №12: Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 9°. Ответ дайте в градусах.



Дано:

ABC – треугольник

O – центр окружности

$O \in AB$

$\angle BAC = 9°$

Найти: $\angle ABC$

Решение:

Известно, что если центр описанной окружности лежит на стороне треугольника, то угол напротив этой стороны — прямой.

Таким образом, угол ACB равен 90°.

Сумма углов треугольника равна 180°, значит

$$\angle ABC = 180° - 90° - 9° = 81°$$

Ответ: 81.

Задания для закрепления:

№1. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 44°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№2. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 44°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№3. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 30°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

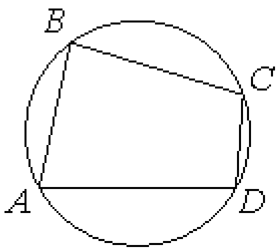
№4. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 33°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№5. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 74°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

Пример №13: Угол A четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, равен 62°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



Дано:

ABCD – четырехугольник

$$\angle A = 62°$$

Найти: $\angle C$

Решение:

Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180°:

$$\angle A + \angle C = 180°,$$

отсюда

$$\angle C = 180 - \angle A = 180° - 62° = 118°$$

Ответ: 118.

Задания для закрепления:

№1. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 61°. Найдите угол C этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№2. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 32°. Найдите угол C этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№3. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 53°. Найдите угол C этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

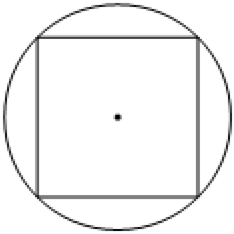
№4. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 79°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

№5. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 68°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________

Пример №14: Сторона квадрата равна $14\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



Дано:

$a = 14\sqrt{2}$

Найти: R

Решение:

Если провести диагонали в квадрате, который вписан в окружность, то радиус окружности будет равен половине диагонали квадрата. Отсюда по теореме Пифагора можно выразить неизвестный нам радиус, который является катетом для равнобедренного треугольника с гипотенузой - стороной квадрата. И так как гипотенуза нам известна, то можно выразить будет этот самый радиус R.

Получаем:

$$a^2 = R^2 + R^2$$

$$a^2 = 2R^2$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Теперь подставляя в полученное равенство известную нам сторону квадрата находим радиус окружности.

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 14$$

Ответ: 14.

Задания для закрепления:

№1. Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

Ответ: ________________

№2. Сторона квадрата равна $8\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

Ответ: ________________

№3. Сторона квадрата равна $12\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

Ответ: ________________

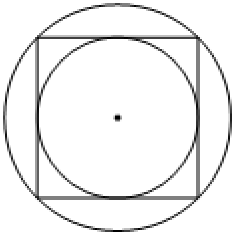
№4. Сторона квадрата равна $24\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

Ответ: ________________

№5. Сторона квадрата равна $32\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

Ответ: ________________

Пример №15: Радиус вписанной в квадрат окружности равен 20√2. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



Дано:

$$r = 20\sqrt{2}$$

Найти: R

Решение:

Если провести в квадрате диагонали, от точки пересечения этих диагоналей до вершин квадрата получится радиус описанной окружности. А если провести из точки пересечения диагоналей высоту к одному из 4 получившихся равнобедренных прямоугольных треугольников, то получим радиус вписанной окружности, которая нам известна. Теперь руководствуясь этими выводами можно вывести соотношение радиусов вписанной и описанной окружности используя теорему Пифагора.

Получаем:

$$R^2 = r^2 + r^2$$

$$R^2 = 2r^2$$

$$R = r\sqrt{2}$$

Теперь подставляя в полученное равенство известную нам величину (радиус вписанной окружности), мы получаем радиус описанной окружности.

$$R = 20\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20 \cdot 2 = 40$$

Ответ: 40.

Задания для закрепления:

№1. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

Ответ: ________________

№2. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

Ответ: ________________

№3. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $26\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

Ответ: ________________

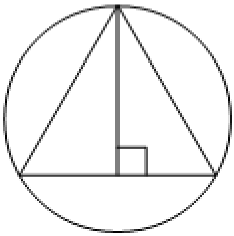
№4. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $16\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

Ответ: ________________

№5. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $14\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

Ответ: ________________

Пример №16: Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 16. Найдите высоту этого треугольника.



Дано:

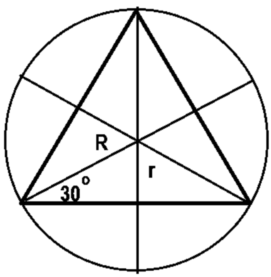
$R = 16$

Найти: h

Решение:

Проведем еще две прямые в равностороннем треугольнике. Причем на прямой часть ее будет высотой, а одновременно биссектрисой и медианой.

В итоге получим 6 прямоугольных треугольников, у которых есть угол в 30 градусов, а значит $R = 2r$, то есть вся высота $h = 1{,}5R$.



Следовательно,

$$16 \cdot 1.5 = 24$$

Ответ: 24.

Задания для закрепления:

№1. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.

Ответ: ________________

№2. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 10. Найдите высоту этого треугольника.

Ответ: ________________

№3. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 8. Найдите высоту этого треугольника.

Ответ: ________________

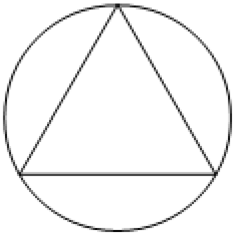
№4. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 18. Найдите высоту этого треугольника.

Ответ: ________________

№5. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 20. Найдите высоту этого треугольника.

Ответ: ________________

Пример №17: Сторона равностороннего треугольника равна $18\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



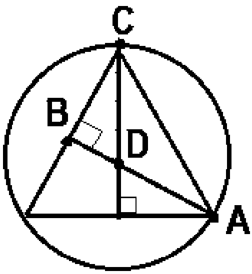
Дано:

$a = 18\sqrt{3}$

Найти: R

Решение:

Достраиваем в нашем равностороннем треугольнике две высоты, которые также являются и биссектрисами. В итоге каждый угол из которого выходит высота делится пополам и для равностороннего треугольника становится равен $60°/2 = 30°$. То есть $BC = AC/2$.



Также при пересечении высот мы получаем еще один меньший прямоугольный треугольник BCD, где также есть угол в 30 градусов. И опять же делаем заключение, что $CD = 2 \cdot BD$, а CD является радиусом описанной окружности.

Следовательно, $R = \frac{AC}{\sqrt{3}}$

Отсюда,

$$R = \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 18$$

Ответ: 18.

Задания для закрепления:

№1. Сторона равностороннего треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: ________________

№2. Сторона равностороннего треугольника равна $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: ________________

№3. Сторона равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: ________________

№4. Сторона равностороннего треугольника равна $10\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

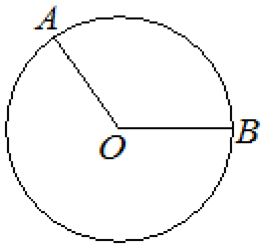
Ответ: ________________

№5. Сторона равностороннего треугольника равна $25\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: ________________

Длина окружности и площадь круга

Пример №18: На окружности с центром О отмечены точки A и B так, что ∠AOB=120°. Длина меньшей дуги AB равна 67. Найдите длину большей дуги.



Дано:

$\frown AB = 67$

$\angle AOB = 120°$

Найти: $\frown AB$

Решение:

∠AOB является центральным и равен градусной мере дуги, на которую опирается.

Следовательно, градусная мера меньшей дуги AB тоже составляет 120°.

Значит градусная мера большей дуги равна

$$360° - 120° = 240°$$

Пусть x - длина большей дуги, тогда получаем пропорцию:

$$\frac{120}{240} = \frac{67}{x}$$

$$x = \frac{240 \cdot 67}{120}$$

$$x = 134$$

Ответ: 134.

Задания для закрепления:

№1. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB=66°$. Длина меньшей дуги AB равна 99. Найдите длину большей дуги AB.

Ответ: ________________

№2. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB=140°$. Длина меньшей дуги AB равна 98. Найдите длину большей дуги AB.

Ответ: ________________

№3. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB=18°$. Длина меньшей дуги AB равна 5. Найдите длину большей дуги AB.

Ответ: ________________

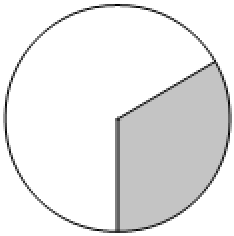
№4. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB=80°$. Длина меньшей дуги AB равна 58. Найдите длину большей дуги AB.

Ответ: ________________

№5. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB=20°$. Длина меньшей дуги AB равна 88. Найдите длину большей дуги AB.

Ответ: ________________

Пример №19: Площадь круга равна 123. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 120°.



Дано:

$S = 123$

Найти: $S(\angle 120°)$

Решение:

Круг составляет 360°, его площадь равна 123.

Пусть x - площадь сектора, центральный угол которого равен 120°. Составим пропорцию.

$$\frac{360}{120} = \frac{123}{x}$$

$$x = \frac{120 \cdot 123}{360}$$

$$x = 41$$

Ответ: 41.

Задания для закрепления:

№1. Площадь круга равна 90. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 60°.

Ответ: ________________

№2. Площадь круга равна 120. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 30°.

Ответ: ________________

№3. Площадь круга равна 72. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 90°.

Ответ: ________________

№4. Площадь круга равна 69. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 120°.

Ответ: ________________

№5. Площадь круга равна 180. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 30°.

Ответ: ________________

Методические рекомендации:

1. Получив задачу, первое, что нужно сделать, - разобраться, что это за задача, каковы её условия, в чем состоят её требования, т.е. провести анализ задачи. Этот анализ и составляет первый этап процесса решения задачи.
2. Выбрать теоретические сведения, необходимые для решения задачи.
3. Начиная решать задачу, использовать определения и свойства, входящих в задачу данных и искомых элементов, вести рассуждения, например : треугольник равнобедренный, следовательно, две касательные проведены из одной точки, следовательно, окружность описана около прямоугольного треугольника, следовательно, и т.п. Вспомнить теоремы, в которых связаны данные и искомые элементы задачи, вспомнить похожие задачи.
4. Анализ задачи и построение её схематической записи необходимо главным образом для того, чтобы найти способ решения задачи. Этот поиск способа решения и составляет четвертый этап процесса решения

задачи. Когда способ решения задачи найден, необходимо его осуществить.

5. Ответ.

Список литературы:

1. Семенов А. В., Трепалин А. С., Ященко И.В., Захаров П.И. Государственная итоговая аттестация выпускников 9 классов в новой форме. Математика. Москва : Интеллект-Центр, 2012. 112 с.
2. Третьяк И.В. Математика в схемах и таблицах/И.В.Третьяк. – Москва: Эксмо 2017.
3. Ященко И.В., Семенов А.В., Кукса Е.А.: ОГЭ – 2018. Математика. Типовые экзаменационные варианты. ФИПИ – школе. Москва : Национальное образование, 2018.