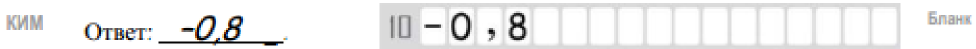
Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Тренировочный вариант № 516

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.



При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

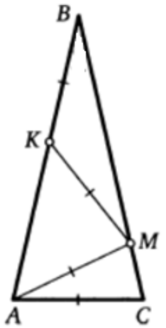
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

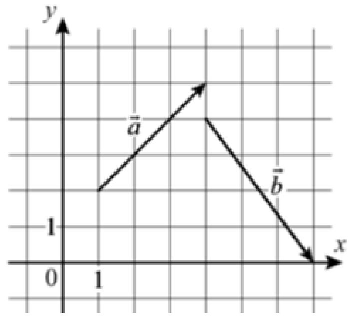
Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяли точки K и M соответственно так, что BK=KM=AM=AC. Во сколько раз угол при вершине B треугольника ABC меньше угла при вершине C.



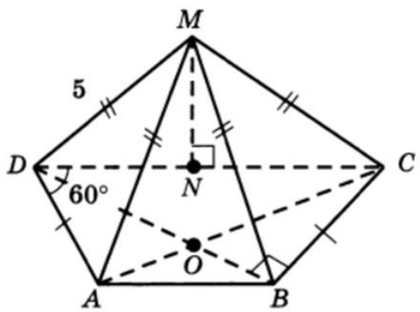
Ответ: ________________________.

2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите длину вектора $4\vec{a}+\vec{b}$.



Ответ: ________________________.

3. В основании пирамиды ABCDM лежит равнобедренная трапеция с острым углом 60^0. Вершина проецируется в середину стороны DC. Все боковые ребра пирамиды равны 5, $AC = 4\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды V. В ответе укажите $\frac{V}{\sqrt{3}}$.



Ответ: ________________________.

4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет ровно две окрашенные грани.

Ответ: ________________________.

5. В некую страну ввозится 40% телевизоров японского производства, и каждый такой телевизор работает без отказов два года с вероятностью 0,5. Остальные телевизоры — китайского производства, и вероятность его безотказной работы за два года равна 0,7. Купленный телевизор проработал безотказно два года. С какой вероятностью он японский? Ответ округлите до сотых.

Ответ: ________________________.

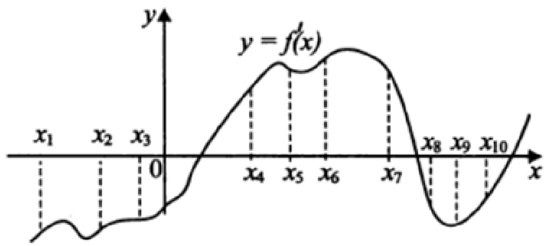
6. Решите уравнение: $\log_9\left(\frac{x^2}{4}\right)+\log_3(x+5)=1$. Если уравнение имеет несколько корней, в ответе укажите больший из них.

Ответ: ________________________.

7. Найдите значение выражения $27^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{3}}+4\cdot 5^{\log_5^2 2}-2^{\log_5 2}\cdot\log_2 16$.

Ответ: ________________________.

8. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ - производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены десять точек $x_1, x_2, ..., x_{10}$.



Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?

Ответ: ________________________.

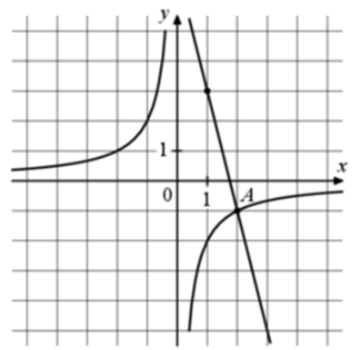
9. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью v_0 = 84 км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением a = 96 км/ч². Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S=v_0t+\frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 24 км от города. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ________________________.

10. Из пункта А в пункт В сплавляют по реке плоты, отправляя их через равные промежутки времени. Пешеход, идущий из А в В, прошел треть пути от А к В к моменту отплытия первого плота. Дойдя до В, пешеход сразу отправился в А и встретил первый плот, пройдя более 3/13 пути от В к А, а последний плот он встретил, пройдя более 9/10 пути от В до А. Пешеход в пункт А и седьмой плот в пункт В прибыли одновременно. Из пункта А пешеход сразу вышел в В и прибыл туда одновременно с последним плотом. Сколько плотов отправлено из А в В?

Ответ: ________________________.

11. На рисунке изображены графики функций $f(x)=\frac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках А и В. Найдите ординату точки В.



Ответ: ________________________.

12. Найдите точку максимума функции $y=-6x^{\frac{3}{2}}+36x^{\frac{1}{2}}-11$.

Ответ: ________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. А) Решите уравнение $\dfrac{3\sqrt{3}\cos 2x + 3\sin 2x}{\sqrt{3}\cos x + \sin x} = 4\cos x - \dfrac{1}{\cos x}$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{2}\right]$

14. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD точки M и K – середины сторон SB и DC соответственно. Через центр основания пирамиды проведена плоскость α параллельно прямым AM и SK.
А) Докажите, что α делит ребро BC в отношении 1 : 5, считая от точки C.
Б) Найдите объем пирамиды, основанием которой является сечение пирамиды плоскостью α, а вершиной – точка A, если у пирамиды SABCD высота равна 12, а сторона основания равна $8\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство: $\dfrac{\log_3(5x+6)\cdot\log_{5x+6} 2}{\log_9(4x+5)} \le 1$

16. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 3/5 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 590 денежным единицам, к концу следующего года — 701 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 3/5 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 610 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

17. Окружность с центром в точке O вписана в треугольник ABC, пересекает отрезок AO в точке M и касается стороны AB в точке N. Прямые NM и BO параллельны.
А) Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный
Б) Прямая BO пересекает вписанную окружность в точке L (BL > BO). Найдите отношение площади четырёхугольника BNML к площади треугольника ABC, если $\cos\angle ABC = \dfrac{7}{9}$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + 2x + a^2 + 2a - 5 = 2\left(f\left(\frac{1}{x}\right) - ax\right), \text{ где } f(t) = \frac{\sqrt[3]{(27t^2+4)(t+2)+32t}}{t - \sqrt{t^2}}$$

имеет единственное решение.

19. Кондитерский магазин торгует тортами трех размеров: большой торт, средний торт и маленький торт (пирожное). Средний торт получается из большого торта разрезанием на 4 части, пирожное тоже получается из среднего торта разрезанием на 4 части.
А) Испекли 15 больших тортов. Некоторые из них разрезали и получили средние торты. Несколько средних тортов разрезали и получили пирожные. Может ли всего получиться 80 тортов разных размеров? А 81 торт?
Б) Большой торт стоит 100 рублей, средний торт стоит 30 рублей, пирожное стоит 10 рублей. Испекли несколько больших тортов. Как их разрезать, чтобы всех тортов разных размеров стало ровно в 7 раз больше, а их общая стоимость была максимальной?
В) После разрезания испеченных тортов оказалось, что получилось одинаковое количество тортов всех трех типов. Какое наименьшее возможное количество больших тортов испекли?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.